



Lösung 1

1. $a b \vee a \bar{b} \stackrel{\{Distributivgesetz\}}{=} a(b \vee \bar{b}) \stackrel{\{Inverses\ Element\}}{=} a \wedge 1 \stackrel{\{Neutralelement\}}{=} a$
2. $(a \vee \bar{b}) b \stackrel{\{Kommutativgesetz\}}{=} b(a \vee \bar{b}) \stackrel{\{Distributivgesetz\}}{=} b a \vee b \bar{b} \stackrel{\{Inverses\ Element\}}{=} b a \vee 0 \stackrel{\{Neutralelement\}}{=} b a \stackrel{\{Kommutativgesetz\}}{=} a b$
3. $a \bar{b} \vee b \stackrel{\{Kommutativgesetz\}}{=} b \vee a \bar{b} \stackrel{\{Distributivgesetz\}}{=} (b \vee a)(b \vee \bar{b}) \stackrel{\{Inverses\ Element\}}{=} (b \vee a) \wedge 1 \stackrel{\{Neutralelement\}}{=} (b \vee a) \stackrel{\{Kommutativgesetz\}}{=} (a \vee b)$
4. $(a \vee b)(a \vee \bar{b}) \stackrel{\{Distributivgesetz\}}{=} a \vee b \bar{b} \stackrel{\{Inverses\ Element\}}{=} a \vee 0 \stackrel{\{Neutralelement\}}{=} a$

Lösung 2

1. Es gilt zu beweisen, dass $(\bar{a} \wedge \bar{b})$ das Komplementelement von $(a \vee b)$ ist. Dazu müssen die Bedingungen der Komplementgesetze ($x \vee \bar{x} = 1$) und ($x \wedge \bar{x} = 0$) erfüllt sein.

Mit $x = a \vee b$ gilt:

- $(a \vee b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) = (a \vee b \vee \bar{a}) \wedge (a \vee b \vee \bar{b}) = (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1 \wedge 1 = 1$
- $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b}) = (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) = (0 \wedge \bar{b}) \vee (0 \wedge \bar{a}) = 0 \vee 0 = 0$

Also $(\bar{a} \wedge \bar{b})$ ist das Komplementelement von $(a \vee b)$ und damit ist das DeMorgan-Gesetz: $a \vee b = \overline{\bar{a} \wedge \bar{b}}$ bewiesen.

2. Aus den Voraussetzungen folgt

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) &= (a \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge c) \\ (a \vee \bar{a}) \wedge b &= (a \vee \bar{a}) \wedge c \\ 1 \wedge b &= 1 \wedge c \quad \Rightarrow \quad b = c \quad q.e.d. \end{aligned}$$

3. Setzt man

$$m = a \vee (b \vee c) \quad \text{und} \quad n = (a \vee b) \vee c$$

so hat man zu beweisen, dass $m = n$ ist.

$$\begin{aligned} a \wedge m &= a \wedge (a \vee (b \vee c)) = a \\ a \wedge n &= a \wedge ((a \vee b) \vee c) = (a \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$a \wedge m = a \wedge n \tag{1}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \bar{a} \wedge m &= \bar{a} \wedge (a \vee (b \vee c)) = (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge (b \vee c)) = 0 \vee (\bar{a} \wedge (b \vee c)) \\ &= (\bar{a} \wedge (b \vee c)) = (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge c) \\ \bar{a} \wedge n &= \bar{a} \wedge ((a \vee b) \vee c) = (\bar{a} \wedge (a \vee b)) \vee (\bar{a} \wedge c) = ((\bar{a} \wedge a) \vee (\bar{a} \wedge b)) \vee (\bar{a} \wedge c) \\ &= (0 \vee (\bar{a} \wedge b)) \vee (\bar{a} \wedge c) = (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge c) \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\bar{a} \wedge m = \bar{a} \wedge n \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$m = n \quad q.e.d.$$

Lösung 3

$$\begin{aligned} 1. \text{ Zu zeigen: } (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c &= a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) \\ (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c &= (a \leftrightarrow b)c \vee (a \not\leftrightarrow b)\bar{c} \\ &= (a b \vee \bar{a} \bar{b})c \vee (a \bar{b} \vee \bar{a} b)\bar{c} \\ &= a b c \vee \bar{a} \bar{b} c \vee a \bar{b} \bar{c} \vee \bar{a} b \bar{c} \\ &= a (b c \vee \bar{b} \bar{c}) \vee \bar{a} (b \bar{c} \vee \bar{b} c) \\ &= a (b \leftrightarrow c) \vee \bar{a} (b \not\leftrightarrow c) \\ &= a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zu zeigen: } (a \not\leftrightarrow b) \not\leftrightarrow c &= a \not\leftrightarrow (b \not\leftrightarrow c) \\ (a \not\leftrightarrow b) \not\leftrightarrow c &= (a \not\leftrightarrow b)\bar{c} \vee (a \leftrightarrow b)c \\ &= (a \leftrightarrow b)c \vee (a \not\leftrightarrow b)\bar{c} \\ &= (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c \\ &= a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) && \text{wurde bereits bewiesen!} \\ &= a (b \leftrightarrow c) \vee \bar{a} (b \not\leftrightarrow c) \\ &= a \not\leftrightarrow (b \not\leftrightarrow c) \end{aligned}$$

2. Zu zeigen: $(a \bar{\wedge} b) \bar{\wedge} c \neq a \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} c)$

a	b	c	$a \bar{\wedge} b$	$b \bar{\wedge} c$	$(a \bar{\wedge} b) \bar{\wedge} c$	$a \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} c)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1

Zu zeigen: $(a \bar{\vee} b) \bar{\vee} c \neq a \bar{\vee} (b \bar{\vee} c)$

a	b	c	$a \bar{\vee} b$	$b \bar{\vee} c$	$(a \bar{\vee} b) \bar{\vee} c$	$a \bar{\vee} (b \bar{\vee} c)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

3. Die Implikationen \rightarrow und \leftarrow sind **nicht assoziativ**.

Zu zeigen: $(a \rightarrow b) \rightarrow c \neq a \rightarrow (b \rightarrow c)$

a	b	c	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow c$	$(a \rightarrow b) \rightarrow c$	$a \rightarrow (b \rightarrow c)$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Es gilt auch: $(a \leftarrow b) \leftarrow c \neq a \leftarrow (b \leftarrow c)$ (Beweis analog wie oben)

Lösung 4

1. Zu zeigen: $p \vee (p \wedge \bar{q}) = 1$
- $$\begin{aligned}
 p \vee (p \wedge \bar{q}) &= p \vee \bar{p} \vee \bar{q} && \text{(DeMorgan-Gesetz)} \\
 &= (p \vee \bar{p}) \vee \bar{q} && \text{(Assoziativgesetz)} \\
 &= 1 \vee \bar{q} && \text{(Inverses Element)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$
2. Zu zeigen: $(a \leftrightarrow b) = ((a \vee b) \rightarrow (ab))$
- $$\begin{aligned}
 (a \leftrightarrow b) &= (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \\
 &= (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a) \\
 &= ((\bar{a} \vee b) \wedge \bar{b}) \vee ((\bar{a} \vee b) \wedge a) \\
 &= (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge a) \\
 &= (\overline{a \vee b}) \vee (b \wedge a) \\
 &= (a \vee b) \rightarrow (a \wedge b)
 \end{aligned}$$
- oder: $(a \leftrightarrow b) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b)$
- $$\begin{aligned}
 &= (\overline{a \vee b}) \vee (a \wedge b) \\
 &= (a \vee b) \rightarrow (a \wedge b)
 \end{aligned}$$

Lösung 5

$$y = \bar{b} \bar{a} \vee a = (\bar{a} \vee a) \wedge (\bar{b} \vee a) = \bar{b} \vee a$$

1. $(\wedge, \vee,)$: $y = \bar{b} \vee a$
- $$(\wedge,) : y = \overline{\bar{b} \vee a} = \bar{b} \wedge \bar{a}$$
- $$(\vee,) : y = \bar{b} \vee a$$
2. $(\bar{})$: $y = \overline{\bar{b} \vee a} = b \wedge \bar{a} = b \wedge (a \wedge \bar{a})$
- $$(\bar{\vee}) : y = \overline{\bar{b} \vee a} = \bar{b} \vee a = (b \vee \bar{b}) \vee a = ((b \vee \bar{b}) \vee a) \vee ((b \vee \bar{b}) \vee a)$$
- $$(\wedge, \leftrightarrow) : y = \bar{b} \vee a = (b \leftrightarrow 1) \vee a = (b \leftrightarrow 1) \leftrightarrow a \leftrightarrow ((b \leftrightarrow 1) \wedge a)$$

3. Die Negation und Konjunktion lassen sich durch die Operatoren Äquivalenz und Disjunktion ersetzen

- Negation: $\bar{x} = x \leftrightarrow 0$
- Konjunktion:

$$x_0 \wedge x_1 = \overline{\bar{x}_0 \vee \bar{x}_1} = ((x_0 \leftrightarrow 0) \vee (x_1 \leftrightarrow 0)) \leftrightarrow 0 = (x_0 \vee x_1) \leftrightarrow x_0 \leftrightarrow x_1$$

Somit bildet (\vee, \leftrightarrow) ein vollständiges Operatorensystem.

Die Funktion y lässt sich in diesem Operatorensystem darstellen.

$$y = \bar{b} \vee a = (b \leftrightarrow 0) \vee a$$