Lösung zur Klausur vom 03. August 2006

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $g(x)$ im Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ genau einen Fixpunkt x^* besitzt und dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = g(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ gegen x^* konvergiert.

(b) Wieviele Iterationsschritte des Verfahrens $x_{n+1} = g(x_n)$ müssen ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ durchgeführt werden, um $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ garantieren zu können?

(c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von g und berechnen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = -1$ einen Newtonschritt.

Lösung:

(a) Zu zeigen: Voraussetzunge des BFPS $\boxed{1/2}$

(1) $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ abgeschlossen

(2) g Abb. in sich, d.h. $g(I) \subseteq I$: g monoton wachsend, da

$$g'(x) = \frac{1}{2}x + x^2 > 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{und}$$

$$0 \le \frac{1}{5} = g(0) \le g(x) \le g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} \le \frac{1}{5} + \frac{2}{16} = \frac{13}{40} \le \frac{1}{2} \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \qquad \boxed{1/2}$$

(3) g Kontraktion, d.h. $|g(x) - g(y)| \le L|x - y|$, $L \in (0, 1)$: Da g diffbar gilt:

$$L := \max_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |g'(x)| = \max_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} \left|\frac{1}{2}x + x^2\right| = \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2} \qquad \boxed{1/2}$$

$\Rightarrow$ Bed. des BFPS sind erfüllt, $x_{n+1} = g(x_n)$ konv. für jeden Startwert $x_0 \in I$ gegen genau einen Fixpunkt $x^* \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. $\boxed{1/2}$.

(b) a-priori Fehlerabschätzung: $\underbrace{|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1 - L}|x_1 - x_0|}_{\boxed{1/2}}$. Mit $x_0 = 0$ folgt $x_1 = g(x_0) = \frac{1}{5}$. Damit erhalten wir

$$|x_n - x_n| \le \frac{L^n}{1 - L}|x_1 - x_0| = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \left|\frac{1}{5} - 0\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5} \overset{!}{<} 10^{-4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{10} < 10^{-4} \Rightarrow 10^4 \cdot \frac{1}{10} < 2^{n-2} \Rightarrow 10^3 < 2^{n-2} \Rightarrow n = 12 \qquad \boxed{3/2}$$

Es müssen $n = 12$ Iterationsschritte durchgeführt werden. $\boxed{1/2}$

(c) Für das Newton-Verfahren gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}x_n^2 + \frac{1}{3}x_n^3}{\frac{1}{2}x_n + x_n^2} \qquad \boxed{1/2}$$

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -1 - \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}}{-\frac{1}{2} + 1} = -1 - \frac{\frac{12+15-20}{60}}{\frac{1}{2}} = -1 - \frac{7 \cdot 2}{60 \cdot 1} = -1 - \frac{7}{30} = -\frac{37}{30} \qquad \boxed{1/2}$$

Aufgabe 2:

(a) Gegeben seien die vier Wertepaare (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 3$:

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	0	1
y_i	-1	1	-1	-2

Zeigen Sie, dass kein Polynom zweiten Grades $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ exisitiert mit $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, 3$.

Bestimmen Sie Werte α^*, β^* und γ^* so, dass die Funktion

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) := \sum_{i=0}^{3} (y_i - (\alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2))^2,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

für α^*, β^* und γ^* ihr Minimum annimmt.

(b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (3, 2, 1)^\top$.

Lösung:

(a) Annahme: Es exisitert ein Polynom zweiten Grades $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $p(x_i) = \alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 = y_i,\ i = 0, \ldots, 3$. Dann ist dies äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = y \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1/2}$$

Aber mit Gauß folgt:

$$A|y = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 3 = \mathrm{Rg}(A) < \mathrm{Rg}(A|y) = 4 \Rightarrow$ LGS überbestimmt und damit unlösbar $\Rightarrow p(x)$ existiert nicht $\boxed{1/2}$

Minimum des Residuums in der Euklid-Norm ist gegeben durch die Lösung der Normalgleichung $A^\top A \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \\ \gamma^* \end{pmatrix} = A^\top y$ mit $\boxed{1/2}$

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & -8 \\ 6 & -8 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A^\top y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1/2}$$

Mit Gauß folgt:

$$A^\top A | A^\top y = \begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 6 & -3 \\ -2 & 6 & -8 & -1 \\ 6 & -8 & 18 & -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 12 & -6 & 18 & -9 \\ -12 & 36 & -48 & -6 \\ -12 & 16 & -36 & 10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 12 & -6 & 18 & -9 \\ & 30 & -30 & -15 \\ & 10 & -18 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & -3/2 \\ & 10 & -10 & -5 \\ & 10 & -18 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & -3/2 \\ & 1 & -1 & -1/2 \\ & & 1 & -3/4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 3/4 \\ & 1 & 0 & -5/4 \\ & & 1 & -3/4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ & 1 & 0 & -5/4 \\ & & 1 & -3/4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \\ \gamma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -5/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p(x) = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \qquad \boxed{1}$$

(b) Cholesky-Algorithmus

$$\begin{aligned}
&\text{1. Zeile: } l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3 \\
&\text{2. Zeile: } l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1 \\
&\qquad l_{22} = \sqrt{a_{22} - |l_{21}|^2} = \sqrt{2 - |1|^2} = 1 \\
&\text{3. Zeile: } l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1 \\
&\qquad l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{31}l_{21}) = \frac{1}{1}(-1 - 1 \cdot 1) = -2 \\
&\qquad l_{33} = \sqrt{a_{33} - |l_{31}|^2 - |l_{32}|^2} = \sqrt{7 - |1|^2 - |-2|^2} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \boxed{3/2}$$

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; L \underbrace{L^\top x}_{=y} = b, \Rightarrow \; (1) Ly = b, \; L^\top x = y \qquad \boxed{1/2}$$

$$(1) Ly | b = \begin{array}{rrr|l} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & \sqrt{2} & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = (1 - 1 + 2)\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{array} \qquad \boxed{1/2}$$

$$(2) L^\top x | y = \begin{array}{rrr|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = (1 - 3 - 1)\frac{1}{3} = -1 \\ x_2 = 1 + 2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1/2}$$

Aufgabe 3: Gegeben sei das Polynom $p(x) = -2 + 8x - 8x^2 + 4x^3 - x^4$.

(a) Verwenden Sie das Horner-Schema um den quadratischen Faktor $x^2 - 2x + 2$ von $p(x)$ abzuspalten.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen Kreis um 0, in dem alle Nullstellen von $p(x)$ liegen.

(c) Verwenden Sie den Satz von Sturm, um die Anzahl der Nullstellen von $p(x)$ in den Intervallen $[-1, 0]$, $[0, 1]$ und $[1, 2]$ zu bestimmen.

Lösung:

(a) Horner-Schema zur Abspaltung eines quadratischen Faktors $(x^2 - sx - t)$:

	-1	4	-8	8	-2
$s = 2$	$-$	-2	4	-4	$-$
$t = -2$	$-$	$-$	2	-4	4
	-1	2	-2	0	2

$\boxed{1/2}$

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(-x^2 + 2x - 2) + 2 \qquad \boxed{1/2}$$

(b) Gerschgorin: Die Nullstellen $\xi_1, \dots, \xi_n$ des Polynoms $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ liegen in einem Kreis um Null mit Radius r ($\mathcal{K}(0, r)$), wobei

$$r \leq \max\left\{1, \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\right\} = \max\{1, |4| + |-8| + |8| + |-2|\} = 22 \qquad \boxed{1/2}$$

$$r \leq \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\} = \max\{|-2|, 1 + |8|, 1 + |-8|, 1 + |4|\} = 9, \qquad \boxed{1/2}$$

d.h. r ist das Minimum beider obiger Maximal-Werte, d.h. $r = 9$ $\boxed{1/2}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{K}(0, 9)$. $\boxed{1/2}$

(c) Konstruktion einer Sturmschen Kette: $p_0 = p$ und $p_1 = p'$; p_j ($j \geq 2$) mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, d.h. $p_{j-1} = q_j p_j - p_{j+1}$ mit Grad $p_{j+1} <$ Grad p_j. Dabei darf p_j mit einer positiven Zahl zur Vereinfachung der Rechnung multipliziert werden, weil dies nichts an den Vorzeichen bei Auswertung der Polynome p_j ändert!

$$p(x) = -x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 8x - 2 =: p_0(x)$$

$$p'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 16x + 8 \;\Rightarrow\; p_1(x) = \frac{1}{4}p'(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \qquad \boxed{1/2}$$

$\underline{p_0 : p_1}$ $\quad (-x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 8x - 2) : (-x^3 + 3x^2 - 4x + 2) = x - 1$

$$\underline{-(-x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x)}$$
$$x^3 - 4x^2 + 6x - 2$$
$$\underline{-(x^3 - 3x^2 + 4x - 2)}$$
$$-x^2 + 2x \;\Rightarrow\; p_2(x) = x^2 - 2x \qquad \boxed{1/2}$$

$\underline{p_1 : p_2}$ $\quad (-x^3 + 3x^2 - 4x + 2) : (x^2 - 2x) = -x + 1$

$$\underline{-(-x^3 + 2x^2)}$$
$$x^2 - 4x + 2$$
$$\underline{-(x^2 - 2x)}$$
$$-2x + 2 \;\Rightarrow\; p_3(x) = x - 1 \qquad \boxed{1/2}$$

$\underline{p_2 : p_3}$ $\quad (x^2 - 2x\ ) : (x - 1) = x - 1$

$$\underline{-(x^2 - x)}$$
$$-x$$
$$\underline{-(-x + 1)}$$
$$-1 \;\Rightarrow\; p_4(x) = 1 \qquad \boxed{1/2}$$

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	VZW
-1	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	3
0	$-$	$+$	0	$-$	$+$	3
1	$+$	0	$-$	0	$+$	2
2	$-$	$-$	0	$+$	$+$	1

$\boxed{1/2}$

Keine Nullstelle in $[-1, 0]$ und je eine Nullstelle in $[0, 1]$ und $[1, 2]$. $\boxed{1/2}$

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) - x + 1$ und die Knoten $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$.

(a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_2 zu f bezüglich der Knoten x_0, x_1, x_2 in Newton-Darstellung.

(b) Zeigen Sie für das Newton-Interpolationspolynom p_2 die Fehlerabschätzung

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216}\pi^3.$$

(c) Bestimmen Sie den kubischen Spline s zu f bezüglich des Gitters $\triangle = \{x_0, x_1, x_2\}$ mit den Randbedingungen $s''(x_0) = s''(x_2) = 0$.

Lösung:

(a) Newton-Gestalt; dividierte Differenzen:

$$\begin{array}{r|lll}
x & f(x) & & \\
x_0 = -1 & f(x_0) = [x_0] = 2 = \alpha_0 & & \\
 & & \frac{0-2}{0+1} = -2 = \alpha_1 & \\
x_1 = 0 & f(x_1) = [x_1] = 0 & & \frac{0+2}{1+1} = 1 = \alpha_2 \\
 & & \frac{0-0}{1-0} = 0 & \\
x_2 = 1 & f(x_2) = [x_2] = 0 & &
\end{array}$$

$\boxed{1}$

Newton-Interpolationspolynom:

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= \sum_{i=0}^{2} \alpha_i \omega_i(x) = 2 \cdot 1 - 2(x - x_0) + 1(x-x_0)(x-x_1) && \boxed{1/2} \\
&= 2 \cdot 1 - 2(x+1) + 1(x+1)x = 2 - 2x - 2 + x^2 + x = x^2 - x && \boxed{1/2}
\end{aligned}$$

(b) Verwende Restgliedformel von Cauchy:

$$\max_{[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{(2+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(2+1)}(x)| \max_{x\in[-1,1]} |\omega_3(x)| \qquad \boxed{1/2}$$

Wir benötigen dafür die 3-te Ableitung von f:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \\
f''(x) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \cdot \frac{\pi^2}{4} \\
f'''(x) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \cdot \frac{\pi^3}{8}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\max_{x\in[-1,1]} |f^{(3)}(x)| = \max_{x\in[-1,1]} \left| -\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \cdot \frac{\pi^3}{8} \right| = \frac{\pi^3}{8} \qquad \boxed{1/2}$$

Die Newton-Grundfunktion ω_3 und ihre Ableitung ergeben sich zu:

$$\omega_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = (x+1)x(x-1) = x(x^2-1) = x^3 - x, \; \omega_3'(x) = 3x^2 - 1 \overset{!}{=} 0$$

Zur Berechnung des Maximums von $\omega_3(x)$ in $[-1,1]$ setzen wir die erste Ableitung gleich null:

$$\omega_3'(x) \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Das Maximum von ω_3 in $[-1,1]$ wird entweder bei $x_{1,2}$ oder am Rand bei -1 oder 1 angenommen. Es gilt $\omega_3(-1) = 0$ und $\omega_3(1) = 0$ und

$$\omega_3\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) = \left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mp\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Damit erhalten wir das Maximum zu:

$$\max_{x\in[-1,1]} |\omega_3(x)| = \frac{2\sqrt{3}}{9} \qquad \boxed{1/2}$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216} \qquad \boxed{1/2}$$

(c) Für einen kubischen Spline bzgl. des Gitters $\triangle = \{x_0, x_1, x_2\}$ muss gelten:

$$\begin{aligned} &s|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathcal{P}_3, j = 1, 2 \\ &s \in C^2([x_0, x_2]) \qquad \boxed{1/2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Ansatz für den kubischen Spline s mit seinen ersten beiden Ableitungen:

$$s(x) = \begin{cases} a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 & x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$s'(x) = \begin{cases} b_1 + 2c_1 x + 3d_1 x^2 & x_0 \leq x \leq x_1 \\ b_2 + 2c_2 x + 3d_2 x^2 & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} 2c_1 + 6d_1 x & x_0 \leq x \leq x_1 \\ 2c_2 + 6d_2 x & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

Nun muss gelten:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Eigenschaften}\\ \text{des kubischen}\\ \text{Splines}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{llr} s_0(0) & = a_1 = s_1(0) = a_2 & (1) \\ s_0'(0) & = b_1 = s_1'(0) = b_2 & (2) \\ s_0''(0) & = c_1 = s_1''(0) = c_2 & (3) \end{array}\right. \qquad \boxed{1/2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Inter-}\\ \text{polations-}\\ \text{bedingungen}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{llr} s_0(-1) & = a_1 - b_1 + c_1 - d_1 = 2 = f(-1) & (4) \\ s_0(0) & = a_1 = 0 = f(0) \Rightarrow \boxed{a_1 = 0} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{a_2 = 0} & (5) \\ s_1(1) & = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 = f(1) & (6) \end{array}\right. \qquad \boxed{1/2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Rand-}\\ \text{bedingungen}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{llr} s''(-1) & = 2c_1 - 6d_1 = 0 & (7) \\ s''(1) & = 2c_2 + 6d_2 = 0 & (8) \end{array}\right. \qquad \boxed{1/2}$$

$(7) \Rightarrow c_1 = 3d_1; (8) \Rightarrow c_2 = -3d_2; (3) \Rightarrow c_1 = c_2 \Rightarrow d_1 = -d_2$

$(4) \Rightarrow 0 - b_1 + 3d_1 - d_2 = 2 \Leftrightarrow -b_1 + 2d_1 = 2 \quad (10)$

$(6) \Rightarrow a - 2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \Leftrightarrow 0 + b_1 + 3d_1 - d_1 = 0 \Leftrightarrow b_1 + 2d_1 = 0 \quad (11)$

$(10) + (11) \Rightarrow 4d_1 = 2 \Rightarrow \boxed{d_1 = 1/2} \quad (12)$

(12) einsetzen in (11) $\Rightarrow b_1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = -1 = b_2}$

(12) einsetzen in (9) $\Rightarrow \boxed{d_2 = -d_1 = -1/2}$

(12) einsetzen in (7) und (8) $\Rightarrow \boxed{c_1 = 3d_1 = 3/2}$ und $\boxed{c_2 = -3d_2 = 3/2}$

Damit erhalten wir den kubischen Spline zu:

$$s(x) = \begin{cases} -x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \boxed{1}$$

Aufgabe 5:

(a) Gegeben sei das Integral $\int_0^3 f(x)dx$ und die Knoten $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$. Bestimmen Sie dazu eine Quadraturformel mit Exaktheitsgrad 2.

(b) Von einer Funktion $f \in C^2([-2,2])$ seien folgende Funktionswerte gegeben:

$$f(-2) = -3,\ f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(2) = 1.$$

Nähern Sie das Integral $\int_{-2}^2 f(x)dx$ mit der zusammengesetzten Keplerregel unter Verwendung aller gegebenen Funktionswerte an. Schätzen sie unter der Voraussetzung $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 15,\ \forall x \in [-2,2]$ den Fehler ab.

Lösung:

(a) Für eine Quadraturformel über $[0,3]$ vom Exaktheitsgrad 2 zu den Knoten $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$ muss gelten:

$$\int_0^3 (a + bx + cx^2)dx \overset{!}{=} \sum_{j=1}^{3} \omega_j p(x_j) \qquad \boxed{1/2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 (a + bx + cx^2)dx &= ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 3a + \frac{9}{2}b + \frac{27}{3}c \\ &\overset{!}{=} \omega_1[a] + \omega_2[a+b+c] + \omega_3[a+3b+9c] \\ &= a[\omega_1 + \omega_2 + \omega_3] + b[\omega_2 + 3\omega_3] + c[\omega_2 + 9\omega_3] \qquad \boxed{1/2}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{array}{ccc|c} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ & 1 & 3 & 9/2 \\ & 1 & 9 & 9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ & 1 & 3 & 9/2 \\ & & 6 & 9/2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ & 1 & 3 & 9/2 \\ & & 1 & 3/4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 - 3/4 = 9/4 \\ & 1 & 0 & 9/2 - 9/4 = 9/4 \\ & & 1 & 3/4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 9/4 \\ & & 1 & 3/4 \end{array} \Rightarrow \omega_1 = 0,\ \omega_2 = \frac{9}{4},\ \omega_3 = \frac{3}{4} \qquad \boxed{1/2}$$

Damit lautet die Quadraturformel QF:

$$QF = \frac{9}{4}f(1) + \frac{3}{4}f(3) \qquad \boxed{1/2}$$

(b) Zusammengesetzte Keplerregel mit $2h = \frac{b-a}{n}$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = Qf + Rf = \frac{h}{3}\left\{f(a) + 4\sum_{i=1}^{n} f(a + (2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + 2ih) + f(b)\right\} \\ - \frac{(b-a)^5}{2880}\frac{1}{n^4}f^{(4)}(\xi),\ \xi \in (a,b)\end{aligned}$$

Hier gilt: $h = 1, a = -2, b = 2, n = \frac{2+2}{2\cdot 1} = 2$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}Qf &= \frac{1}{3}\{f(-2) + 4[f(-1) + f(1)] + 2f(0) + f(2)\} = \frac{1}{3}\{-3 + 4[-1+2] + 2\cdot 0 + 1\} \\ &= \frac{1}{3}\{-3 + 4 + 1\} = \frac{2}{3} \qquad \boxed{2} \\ Rf &\leq \max_{x\in[-2,2]} \frac{|2+2|^5}{2880}\frac{1}{2^4}|f^{(4)}(x)| \qquad \boxed{1/2} \\ &= \frac{2^{10}}{2880 \cdot 2^4}\cdot 15 = \frac{2^6 \cdot 15}{2880} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \qquad \boxed{1/2}\end{aligned}$$

Aufgabe 6:

(a) Gegeben sei das Polynom $p(x) = 2-3x+3x^2+4x^3$. Bestimmen Sie die Bezier-Darstellung für $p(x)$. Berechnen Sie $p\left(\frac{2}{3}\right)$ mit dem Algorithmus von de Casteljau. Skizzieren Sie den Graphen des Polynoms sowie das Bezier-Polygon für $x \in [0,1]$ in einem Schaubild.

(b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos^3(x)$. Bestimmen Sie bezüglich der Knoten $x_i = \frac{2i\pi}{3}$, $i = 0,1,2$ das reelle trigonometrische Interpolationspolynom $\tau_1(x)$ zu $p(x)$. Hinweis: $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lösung:

(a) Für die Bezier-Darstellung von $p(x)$ muss gelten: $p(x) \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{3} \beta_k b_{k3}(x)$ mit den Bernstein-Grundpolynomen:

$$b_{k3}(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{3-k}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
b_{03}(x) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} x^0(1-x)^3 = (1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\
b_{13}(x) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x^1(1-x)^2 = 3x(1-x)^2 = 3x - 6x^2 + 3x^3 \\
b_{23}(x) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} x^2(1-x)^1 = 3x^2(1-x) = 3x^2 - 3x^3 \\
b_{33}(x) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} x^3(1-x)^0 = x^3
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert mit $p(x) = 2 - 3x + 3x^2 + 4x^3 \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{3} \beta_k b_{k3}(x)$ ein LGS für die β_k's: $\boxed{1/2}$

$$\begin{array}{rrrr|r}
\beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\
\hline
1 & & & & 2 \\
-3 & 3 & & & -3 \\
3 & -6 & 3 & & 3 \\
-1 & 3 & -3 & 1 & 4
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{l}
\beta_0 = 2 \\
\beta_1 = 1 \\
\beta_2 = 1 \\
\beta_3 = 6
\end{array}$$

und damit die Bezier-Darstellung von p:

$$p(x) = 2b_{03}(x) + b_{13}(x) + b_{23}(x) + 6b_{33}(x) \qquad \boxed{1/2}$$

Zur Berechnung von $p\left(\frac{2}{3}\right)$ dient das Schema von de Casteljau:

$$\begin{array}{r|lllllll}
\beta_0 = 2 & \overset{1-2/3}{\searrow} & & & & & & \\
\beta_1 = 1 & \overset{2/3}{\rightarrow} & \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & \\
\beta_2 = 1 & \rightarrow & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 & \rightarrow & \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{10}{9} & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
\beta_3 = 6 & \rightarrow & \frac{1}{3} + \frac{12}{3} = \frac{13}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} + \frac{13}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{29}{9} & \rightarrow & \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{29}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{68}{27} = p\left(\frac{2}{3}\right) & \boxed{1}
\end{array}$$

Zur Darstellung des Bezier-Polygons benötigen wir die Bezierpunkte:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/n \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/n \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n/n \\ \beta_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1/2}$$

(b) Trigonometrisches Interpolationspolynom für obige Knoten:

$$\tau_1(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x \qquad \boxed{1/2}$$

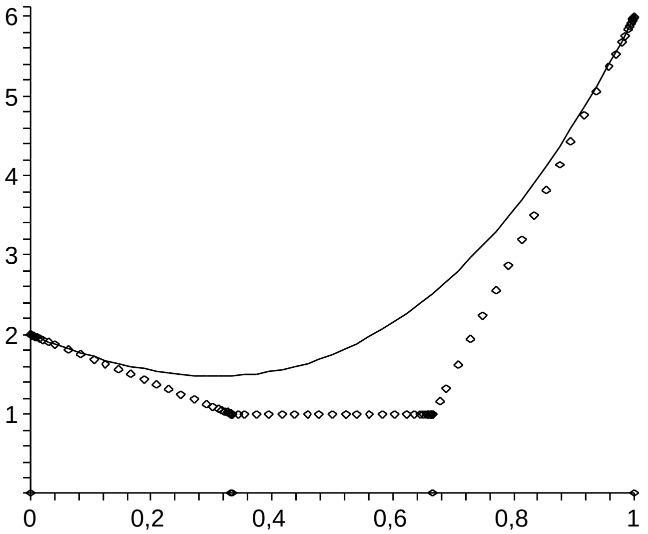

Abbildung 1: p und Bezier-Polygon für $x \in [0,1]$ $\boxed{1/2}$

Gesucht sind nun die $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ mit $\tau_1(x_j) = f(x_j),\ j = 0,1,2$. Dies liefert mit der Wertetabelle:

$$\begin{array}{c|ccc} x_j & 0 & \frac{2}{3}\pi & \frac{4}{3}\pi \\ \hline \cos(x_j) & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \sin(x_j) & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f(x_j) & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}$$

folgendes

$$\begin{aligned} \tau_1(0) &= \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \stackrel{!}{=} f(0) = 1 \\ \tau_1\left(\frac{2}{3}\pi\right) &= \frac{\alpha_0}{2} - \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1 \stackrel{!}{=} f(x_1) = -\frac{1}{8} \\ \tau_1\left(\frac{4}{3}\pi\right) &= \frac{\alpha_0}{2} - \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1 \stackrel{!}{=} f(x_2) = -\frac{1}{8} \qquad \boxed{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_1 & \\ \hline \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{8} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|r} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ & -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8} \\ & -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|r} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ & -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{9}{8} \\ & & -\sqrt{3} & -\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{9}{8} \\ & & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ & & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ & & 1 & 0 \end{array} \qquad \boxed{1/2}$$

Damit erhalten wir das Interpolationspolynom

$$\tau_1(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos x \qquad \boxed{1/2}$$

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ ergibt sich aus der Formel (hier $m = 1$):

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_k \\ \beta_k \end{array}\right\} = \frac{2}{2m+1} \sum_{j=0}^{2m} f(x_j) \left\{ \begin{array}{ll} \cos(kx_j) & , k = 0,1,\ldots,m \\ \sin(kx_j) & , k = 1,\ldots,m \end{array}\right.$$