

Lösung zur Klausur vom 03. August 2006

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

- (a) Zeigen Sie, dass $g(x)$ im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ genau einen Fixpunkt x^* besitzt und dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = g(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ gegen x^* konvergiert.
- (b) Wieviele Iterationsschritte des Verfahrens $x_{n+1} = g(x_n)$ müssen ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ durchgeführt werden, um $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ garantieren zu können?
- (c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von g und berechnen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = -1$ einen Newtonschritt.

Lösung:

(a) Zu zeigen: Voraussetzung des BFPS

$$\boxed{1/2}$$

(1) $I = [0, \frac{1}{2}]$ abgeschlossen

(2) g Abb. in sich, d.h. $g(I) \subseteq I$: g monoton wachsend, da

$$g'(x) = \frac{1}{2}x + x^2 > 0 \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}] \quad \text{und}$$

$$0 \leq \frac{1}{5} = g(0) \leq g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} \leq \frac{1}{5} + \frac{2}{16} = \frac{13}{40} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$\boxed{1/2}$$

(3) g Kontraktion, d.h. $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$, $L \in (0, 1)$: Da g diffbar gilt:

$$L := \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |g'(x)| = \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \frac{1}{2}x + x^2 \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{1/2}$$

\Rightarrow Bed. des BFPS sind erfüllt, $x_{n+1} = g(x_n)$ konv. für jeden Startwert $x_0 \in I$ gegen genau einen Fixpunkt $x^* \in [0, \frac{1}{2}]$.

$$\boxed{1/2}$$

(b) a-priori Fehlerabschätzung: $|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$. Mit $x_0 = 0$ folgt $x_1 = g(x_0) = \frac{1}{5}$. Damit erhalten wir

$$\boxed{1/2}$$

$$|x_n - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \left| \frac{1}{5} - 0 \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5} \stackrel{!}{<} 10^{-4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{10} < 10^{-4} \Rightarrow 10^4 \cdot \frac{1}{10} < 2^{n-2} \Rightarrow 10^3 < 2^{n-2} \Rightarrow n = 12$$

$$\boxed{3/2}$$

Es müssen $n = 12$ Iterationsschritte durchgeführt werden.

$$\boxed{1/2}$$

(c) Für das Newton-Verfahren gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}x_n^2 + \frac{1}{3}x_n^3}{\frac{1}{2}x_n + x_n^2}$$

$$\boxed{1/2}$$

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -1 - \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}}{-\frac{1}{2} + 1} = -1 - \frac{\frac{12+15-20}{60}}{\frac{1}{2}} = -1 - \frac{7 \cdot 2}{60 \cdot 1} = -1 - \frac{7}{30} = -\frac{37}{30}$$

$$\boxed{1/2}$$

Aufgabe 2:

(a) Gegeben seien die vier Wertepaare (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, 3$:

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	0	1
y_i	-1	1	-1	-2

Zeigen Sie, dass kein Polynom zweiten Grades $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ existiert mit $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, 3$.

Bestimmen Sie Werte α^* , β^* und γ^* so, dass die Funktion

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) := \sum_{i=0}^3 (y_i - (\alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2))^2, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

für α^* , β^* und γ^* ihr Minimum annimmt.

(b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (3, 2, 1)^\top$.

Lösung:

(a) Annahme: Es existiert ein Polynom zweiten Grades $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $p(x_i) = \alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 = y_i$, $i = 0, \dots, 3$. Dann ist dies äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = y \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \boxed{1/2}$$

Aber mit Gauß folgt:

$$A|y = \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow 3 = \text{Rg}(A) < \text{Rg}(A|y) = 4 \Rightarrow$ LGS überbestimmt und damit unlösbar $\Rightarrow p(x)$ existiert nicht $\boxed{1/2}$

Minimum des Residuums in der Euklid-Norm ist gegeben durch die Lösung der Normalgleichung $A^\top A \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \\ \gamma^* \end{pmatrix} =$

$A^\top y$ mit $1/2$

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & -8 \\ 6 & -8 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A^\top y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \boxed{1/2}$$

Mit Gauß folgt:

$$\begin{aligned}
 A^\top A | A^\top y &= \begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 6 & -3 & 12 & -6 & 18 \\ -2 & 6 & -8 & -1 & -12 & 36 & -48 \\ 6 & -8 & 18 & -5 & -12 & 16 & -36 \end{array} \begin{array}{c} -9 \\ -6 \\ 10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 12 & -6 & 18 & -9 & 12 & -6 & 18 \\ 30 & -30 & -15 & -6 & 30 & -30 & -15 \\ 10 & -18 & 1 & 10 & 10 & -18 & 1 \end{array} \\
 \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & -3/2 & 2 & -1 & 3 \\ 10 & -10 & -5 & -5 & 1 & -1 & -1/2 \\ 10 & -18 & 1 & 1 & 1 & -3/4 & -3/4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 3/4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5/4 & -5/4 & 1 & 0 & -5/4 \\ 1 & -3/4 & -3/4 & -3/4 & 1 & -3/4 & -3/4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5/4 & -5/4 & 1 & 0 & -5/4 \\ 1 & -3/4 & -3/4 & -3/4 & 1 & -3/4 & -3/4 \end{array} \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \\ \gamma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -5/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow p(x) = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \quad \boxed{1}
 \end{aligned}$$

(b) Cholesky-Algorithmus

1. Zeile: $l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3$

2. Zeile: $l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - |l_{21}|^2} = \sqrt{2 - |1|^2} = 1$$

3. Zeile: $l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{31}l_{21}) = \frac{1}{1}(-1 - 1 \cdot 1) = -2$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - |l_{31}|^2 - |l_{32}|^2} = \sqrt{7 - |1|^2 - |-2|^2} = \sqrt{2}$$

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \boxed{3/2}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{L L^\top x}_{=y} = b, \Rightarrow (1)Ly = b, L^\top x = y \quad \boxed{1/2}$$

$$(1)Ly|b = \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & & y_1 = 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & & y_2 = 1 \\ 1 & -2 & \sqrt{2} & 1 & & y_3 = (1 - 1 + 2)\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{array} \Rightarrow \quad \boxed{1/2}$$

$$(2)L^\top x|y = \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & & x_1 = (1 - 3 - 1)\frac{1}{3} = -1 \\ & 1 & -2 & 1 & & x_2 = 1 + 2 = 3 \\ & & \sqrt{2} & \sqrt{2} & & x_3 = 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1/2}$$

Aufgabe 3: Gegeben sei das Polynom $p(x) = -2 + 8x - 8x^2 + 4x^3 - x^4$.

- (a) Verwenden Sie das Horner-Schema um den quadratischen Faktor $x^2 - 2x + 2$ von $p(x)$ abzuspalten.
 (b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen Kreis um 0, in dem alle Nullstellen von $p(x)$ liegen.
 (c) Verwenden Sie den Satz von Sturm, um die Anzahl der Nullstellen von $p(x)$ in den Intervallen $[-1, 0]$, $[0, 1]$ und $[1, 2]$ zu bestimmen.

Lösung:

- (a) Horner-Schema zur Abspaltung eines quadratischen Faktors ($x^2 - sx - t$):

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 4 & -8 & 8 & -2 \\ \hline s = 2 & - & -2 & 4 & -4 & - \\ t = -2 & - & - & 2 & -4 & 4 \\ \hline & -1 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array} \quad \boxed{1/2}$$

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(-x^2 + 2x - 2) + 2 \quad \boxed{1/2}$$

- (b) Gerschgorin: Die Nullstellen ξ_1, \dots, ξ_n des Polynoms $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ liegen in einem Kreis um Null mit Radius r ($\mathcal{K}(0, r)$), wobei

$$r \leq \max \left\{ 1, \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \right\} = \max\{1, |4| + |-8| + |8| + |-2|\} = 22 \quad \boxed{1/2}$$

$$r \leq \max \{|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\} = \max\{|-2|, 1 + |8|, 1 + |-8|, 1 + |4|\} = 9, \quad \boxed{1/2}$$

d.h. r ist das Minimum beider obiger Maximal-Werte, d.h. $r = 9 \quad \boxed{1/2} \Rightarrow \mathcal{K}(0, 9). \quad \boxed{1/2}$

- (c) Konstruktion einer Sturmschen Kette: $p_0 = p$ und $p_1 = p'$; p_j ($j \geq 2$) mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, d.h. $p_{j-1} = q_j p_j - p_{j+1}$ mit Grad $p_{j+1} < \text{Grad } p_j$. Dabei darf p_j mit einer positiven Zahl zur Vereinfachung der Rechnung multipliziert werden, weil dies nichts an den Vorzeichen bei Auswertung der Polynome p_j ändert!

$$\begin{aligned} p(x) &= -x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 8x - 2 =: p_0(x) \\ p'(x) &= -4x^3 + 12x^2 - 16x + 8 \Rightarrow p_1(x) = \frac{1}{4}p'(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \quad \boxed{1/2} \\ \underline{p_0 : p_1} \quad &(-x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 8x - 2) : (-x^3 + 3x^2 - 4x + 2) = x - 1 \\ &\underline{-(-x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x)} \\ &\quad x^3 - 4x^2 + 6x - 2 \\ &\quad \underline{-(x^3 - 3x^2 + 4x - 2)} \\ &\quad \quad -x^2 + 2x \Rightarrow p_2(x) = x^2 - 2x \quad \boxed{1/2} \\ \underline{p_1 : p_2} \quad &(-x^3 + 3x^2 - 4x + 2) : (x^2 - 2x) = -x + 1 \\ &\underline{-(-x^3 + 2x^2)} \\ &\quad x^2 - 4x + 2 \\ &\quad \underline{-(x^2 - 2x)} \\ &\quad \quad -2x + 2 \Rightarrow p_3(x) = x - 1 \quad \boxed{1/2} \\ \underline{p_2 : p_3} \quad &(x^2 - 2x) : (x - 1) = x - 1 \\ &\underline{-(x^2 - x)} \\ &\quad -x \\ &\quad \underline{-(-x + 1)} \\ &\quad \quad -1 \Rightarrow p_4(x) = 1 \quad \boxed{1/2} \end{aligned}$$

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	VZW
-1	-	+	+	-	+	3
0	-	+	0	-	+	3
1	+	0	-	0	+	2
2	-	-	0	+	+	1

1/2

Keine Nullstelle in $[-1, 0]$ und je eine Nullstelle in $[0, 1]$ und $[1, 2]$.

1/2

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) - x + 1$ und die Knoten $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$.

- (a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_2 zu f bezüglich der Knoten x_0, x_1, x_2 in Newton-Darstellung.
 (b) Zeigen Sie für das Newton-Interpolationspolynom p_2 die Fehlerabschätzung

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \pi^3.$$

- (c) Bestimmen Sie den kubischen Spline s zu f bezüglich des Gitters $\Delta = \{x_0, x_1, x_2\}$ mit den Randbedingungen $s''(x_0) = s''(x_2) = 0$.

Lösung:

- (a) Newton-Gestalt; dividierte Differenzen:

$$\begin{array}{l|l} x & f(x) \\ x_0 = -1 & f(x_0) = [x_0] = 2 = \alpha_0 \\ x_1 = 0 & f(x_1) = [x_1] = 0 \\ x_2 = 1 & f(x_2) = [x_2] = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \rangle \\ \rangle \\ \rangle \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{0-2}{0+1} = -2 = \alpha_1 \\ \frac{0-0}{1-0} = 0 \\ \frac{0+2}{1+1} = 1 = \alpha_2 \end{array} \quad \boxed{1}$$

Newton-Interpolationspolynom:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sum_{i=0}^2 \alpha_i \omega_i(x) = 2 \cdot 1 - 2(x - x_0) + 1(x - x_0)(x - x_1) && \boxed{1/2} \\ &= 2 \cdot 1 - 2(x + 1) + 1(x + 1)x = 2 - 2x - 2 + x^2 + x = x^2 - x && \boxed{1/2} \end{aligned}$$

- (b) Verwende Restgliedformel von Cauchy:

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{(2+1)!} \max_{x \in [-1,1]} |f^{(2+1)}(x)| \max_{x \in [-1,1]} |\omega_3(x)| \quad \boxed{1/2}$$

Wir benötigen dafür die 3-te Ableitung von f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \\ f''(x) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \cdot \frac{\pi^2}{4} \\ f'''(x) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \cdot \frac{\pi^3}{8} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\max_{x \in [-1,1]} |f^{(3)}(x)| = \max_{x \in [-1,1]} \left| -\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \cdot \frac{\pi^3}{8} \right| = \frac{\pi^3}{8} \quad \boxed{1/2}$$

Die Newton-Grundfunktion ω_3 und ihre Ableitung ergeben sich zu:

$$\omega_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = (x + 1)x(x - 1) = x(x^2 - 1) = x^3 - x, \quad \omega_3'(x) = 3x^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

Zur Berechnung des Maximums von $\omega_3(x)$ in $[-1, 1]$ setzen wir die erste Ableitung gleich null:

$$\omega_3'(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Das Maximum von ω_3 in $[-1, 1]$ wird entweder bei $x_{1,2}$ oder am Rand bei -1 oder 1 angenommen. Es gilt $\omega_3(-1) = 0$ und $\omega_3(1) = 0$ und

$$\omega_3\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) = \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mp \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Damit erhalten wir das Maximum zu:

$$\max_{x \in [-1,1]} |\omega_3(x)| = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \boxed{1/2}$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216} \quad \boxed{1/2}$$

(c) Für einen kubischen Spline bzgl. des Gitters $\Delta = \{x_0, x_1, x_2\}$ muss gelten:

$$\begin{aligned} s|_{[x_{j-1}, x_j]} &\in \mathcal{P}_3, j = 1, 2 \\ s &\in C^2([x_0, x_2]) \end{aligned} \quad \boxed{1/2}$$

Damit erhalten wir den Ansatz für den kubischen Spline s mit seinen ersten beiden Ableitungen:

$$\begin{aligned} s(x) &= \begin{cases} a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3 & x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases} \\ s'(x) &= \begin{cases} b_1 + 2c_1x + 3d_1x^2 & x_0 \leq x \leq x_1 \\ b_2 + 2c_2x + 3d_2x^2 & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases} \\ s''(x) &= \begin{cases} 2c_1 + 6d_1x & x_0 \leq x \leq x_1 \\ 2c_2 + 6d_2x & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Nun muss gelten:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Eigenschaften} \\ \text{des kubischen} \\ \text{Splines} \end{array} \right\} & \begin{cases} s_0(0) = a_1 = s_1(0) = a_2 & (1) \\ s'_0(0) = b_1 = s'_1(0) = b_2 & (2) \\ s''_0(0) = c_1 = s''_1(0) = c_2 & (3) \end{cases} \quad \boxed{1/2} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Inter-} \\ \text{polations-} \\ \text{bedingungen} \end{array} \right\} & \begin{cases} s_0(-1) = a_1 - b_1 + c_1 - d_1 = 2 = f(-1) & (4) \\ s_0(0) = a_1 = 0 = f(0) \Rightarrow \boxed{a_1 = 0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \boxed{a_2 = 0} & (5) \\ s_1(1) = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 = f(1) & (6) \end{cases} \quad \boxed{1/2} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Rand-} \\ \text{bedingungen} \end{array} \right\} & \begin{cases} s''(-1) = 2c_1 - 6d_1 = 0 & (7) \\ s''(1) = 2c_2 + 6d_2 = 0 & (8) \end{cases} \quad \boxed{1/2} \end{aligned}$$

$$(7) \Rightarrow c_1 = 3d_1; (8) \Rightarrow c_2 = -3d_2; (3) \Rightarrow c_1 = c_2 \Rightarrow d_1 = -d_2$$

$$(4) \Rightarrow 0 - b_1 + 3d_1 - d_2 = 2 \Leftrightarrow -b_1 + 2d_1 = 2 \quad (10)$$

$$(6) \Rightarrow a - 2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \Leftrightarrow 0 + b_1 + 3d_1 - d_1 = 0 \Leftrightarrow b_1 + 2d_1 = 0 \quad (11)$$

$$(10) + (11) \Rightarrow 4d_1 = 2 \Rightarrow \boxed{d_1 = 1/2} \quad (12)$$

$$(12) \text{ einsetzen in } (11) \Rightarrow b_1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = -1 = b_2}$$

$$(12) \text{ einsetzen in } (9) \Rightarrow \boxed{d_2 = -d_1 = -1/2}$$

$$(12) \text{ einsetzen in } (7) \text{ und } (8) \Rightarrow \boxed{c_1 = 3d_1 = 3/2} \text{ und } \boxed{c_2 = -3d_2 = 3/2}$$

Damit erhalten wir den kubischen Spline zu:

$$s(x) = \begin{cases} -x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \boxed{1}$$

Aufgabe 5:

- (a) Gegeben sei das Integral $\int_0^3 f(x)dx$ und die Knoten $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$. Bestimmen Sie dazu eine Quadraturformel mit Exaktheitsgrad 2.
- (b) Von einer Funktion $f \in C^2([-2, 2])$ seien folgende Funktionswerte gegeben:

$$f(-2) = -3, f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 1.$$

Nähern Sie das Integral $\int_{-2}^2 f(x)dx$ mit der zusammengesetzten Keplerregel unter Verwendung aller gegebenen Funktionswerte an. Schätzen sie unter der Voraussetzung $|f^{(4)}(x)| \leq 15, \forall x \in [-2, 2]$ den Fehler ab.

Lösung:

- (a) Für eine Quadraturformel über $[0, 3]$ vom Exaktheitsgrad 2 zu den Knoten $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$ muss gelten:

$$\int_0^3 (a + bx + cx^2)dx \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^3 \omega_j p(x_j) \quad \boxed{1/2}$$

$$\int_0^3 (a + bx + cx^2)dx = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 3a + \frac{9}{2}b + \frac{27}{3}c$$

$$\stackrel{!}{=} \omega_1[a] + \omega_2[a + b + c] + \omega_3[a + 3b + 9c]$$

$$= a[\omega_1 + \omega_2 + \omega_3] + b[\omega_2 + 3\omega_3] + c[\omega_2 + 9\omega_3] \quad \boxed{1/2}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{array}{ccc|c} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ & 1 & 3 & 9/2 \\ & 1 & 9 & 9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ & 1 & 3 & 9/2 \\ & & 6 & 9/2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ & 1 & 3 & 9/2 \\ & & 1 & 3/4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 - 3/4 = 9/4 \\ & 1 & 0 & 9/2 - 9/4 = 9/4 \\ & & 1 & 3/4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 9/4 \\ & & 1 & 3/4 \end{array} \Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = \frac{9}{4}, \omega_3 = \frac{3}{4} \quad \boxed{1/2}$$

Damit lautet die Quadraturformel QF:

$$QF = \frac{9}{4}f(1) + \frac{3}{4}f(3) \quad \boxed{1/2}$$

- (b) Zusammengesetzte Keplerregel mit $2h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx = Qf + Rf = \frac{h}{3} \left\{ f(a) + 4 \sum_{i=1}^n f(a + (2i-1)h) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + 2ih) + f(b) \right\}$$

$$- \frac{(b-a)^5}{2880} \frac{1}{n^4} f^{(4)}(\xi), \xi \in (a, b)$$

Hier gilt: $h = 1, a = -2, b = 2, n = \frac{2-(-2)}{2 \cdot 1} = 2$. Damit folgt:

$$Qf = \frac{1}{3} \{ f(-2) + 4[f(-1) + f(1)] + 2f(0) + f(2) \} = \frac{1}{3} \{ -3 + 4[-1 + 2] + 2 \cdot 0 + 1 \}$$

$$= \frac{1}{3} \{ -3 + 4 + 1 \} = \frac{2}{3} \quad \boxed{2}$$

$$Rf \leq \max_{x \in [-2, 2]} \frac{|2 + 2|^5}{2880} \frac{1}{2^4} |f^{(4)}(x)| \quad \boxed{1/2}$$

$$= \frac{2^{10}}{2880 \cdot 2^4} \cdot 15 = \frac{2^6 \cdot 15}{2880} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \quad \boxed{1/2}$$

Aufgabe 6:

- (a) Gegeben sei das Polynom $p(x) = 2 - 3x + 3x^2 + 4x^3$. Bestimmen Sie die Bezier-Darstellung für $p(x)$. Berechnen Sie $p\left(\frac{2}{3}\right)$ mit dem Algorithmus von de Casteljau. Skizzieren Sie den Graphen des Polynoms sowie das Bezier-Polygon für $x \in [0, 1]$ in einem Schaubild.
- (b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos^3(x)$. Bestimmen Sie bezüglich der Knoten $x_i = \frac{2i\pi}{3}$, $i = 0, 1, 2$ das reelle trigonometrische Interpolationspolynom $\tau_1(x)$ zu $p(x)$. Hinweis: $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lösung:

- (a) Für die Bezier-Darstellung von $p(x)$ muss gelten: $p(x) \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^3 \beta_k b_{k3}(x)$ mit den Bernstein-Grundpolynomen:

$$b_{k3}(x) = \binom{3}{k} x^k (1-x)^{3-k}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} b_{03}(x) &= \binom{3}{0} x^0 (1-x)^3 = (1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\ b_{13}(x) &= \binom{3}{1} x^1 (1-x)^2 = 3x(1-x)^2 = 3x - 6x^2 + 3x^3 \\ b_{23}(x) &= \binom{3}{2} x^2 (1-x)^1 = 3x^2(1-x) = 3x^2 - 3x^3 \\ b_{33}(x) &= \binom{3}{3} x^3 (1-x)^0 = x^3 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert mit $p(x) = 2 - 3x + 3x^2 + 4x^3 \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^3 \beta_k b_{k3}(x)$ ein LGS für die β'_k s: 1/2

$$\begin{array}{cccc|c} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\ \hline 1 & & & & 2 \\ -3 & 3 & & & -3 \\ 3 & -6 & 3 & & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta_0 = 2 \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = 6 \end{array}$$

und damit die Bezier-Darstellung von p :

$$p(x) = 2b_{03}(x) + b_{13}(x) + b_{23}(x) + 6b_{33}(x) \quad \boxed{1/2}$$

Zur Berechnung von $p\left(\frac{2}{3}\right)$ dient das Schema von de Casteljau:

$$\begin{array}{l} \beta_0 = 2 \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = 6 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1-2/3 \\ \searrow \\ \xrightarrow{2/3} \\ \searrow \\ \rightarrow \\ \searrow \\ \rightarrow \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \\ \\ \frac{1}{3} + \frac{12}{3} = \frac{13}{3} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{10}{9} \\ \\ \frac{1}{3} + \frac{13}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{29}{9} \end{array} \rightarrow \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{29}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{68}{27} = p\left(\frac{2}{3}\right) \quad \boxed{1}$$

Zur Darstellung des Bezier-Polygons benötigen wir die Bezierpunkte:

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \beta_0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1/n \\ \beta_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2/n \\ \beta_2 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} n/n \\ \beta_n \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1/3 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2/3 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 6 \end{array} \right) \quad \boxed{1/2}$$

- (b) Trigonometrisches Interpolationspolynom für obige Knoten:

$$\tau_1(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x \quad \boxed{1/2}$$

