

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

- (a) Zeigen Sie, dass $g(x)$ im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ genau einen Fixpunkt x^* besitzt und dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = g(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ gegen x^* konvergiert.
- (b) Wieviele Iterationsschritte des Verfahrens $x_{n+1} = g(x_n)$ müssen ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ durchgeführt werden, um $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ garantieren zu können?
- (c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von g und berechnen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = -1$ einen Newtonschritt.

Aufgabe 2:

- (a) Gegeben seien die vier Wertepaare (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, 3$:

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	0	1
y_i	-1	1	-1	-2

Zeigen Sie, dass kein Polynom zweiten Grades $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ existiert mit $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, 3$.

Bestimmen Sie Werte α^* , β^* und γ^* so, dass die Funktion

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) := \sum_{i=0}^3 (y_i - (\alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2))^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

für α^* , β^* und γ^* ihr Minimum annimmt.

- (b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (3, 2, 1)^\top$.

Aufgabe 3: Gegeben sei das Polynom $p(x) = -2 + 8x - 8x^2 + 4x^3 - x^4$.

- (a) Verwenden Sie das Horner-Schema um den quadratischen Faktor $x^2 - 2x + 2$ von $p(x)$ abzuspalten.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen Kreis um 0, in dem alle Nullstellen von $p(x)$ liegen.
- (c) Verwenden Sie den Satz von Sturm, um die Anzahl der Nullstellen von $p(x)$ in den Intervallen $[-1, 0]$, $[0, 1]$ und $[1, 2]$ zu bestimmen.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) - x + 1$ und die Knoten $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$.

- (a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_2 zu f bezüglich der Knoten x_0, x_1, x_2 in Newton-Darstellung.
- (b) Zeigen Sie für das Newton-Interpolationspolynom p_2 die Fehlerabschätzung

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \pi^3.$$

- (c) Bestimmen Sie den kubischen Spline s zu f bezüglich des Gitters $\Delta = \{x_0, x_1, x_2\}$ mit den Randbedingungen $s''(x_0) = s''(x_2) = 0$.

Aufgabe 5:

- (a) Gegeben sei das Integral $\int_0^3 f(x) dx$ und die Knoten $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$. Bestimmen Sie dazu eine Quadraturformel mit Exaktheitsgrad 2.
- (b) Von einer Funktion $f \in C^2([-2, 2])$ seien folgende Funktionswerte gegeben:

$$f(-2) = -3, f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 1.$$

Nähern Sie das Integral $\int_{-2}^2 f(x) dx$ mit der zusammengesetzten Keplerregel unter Verwendung aller gegebenen Funktionswerte an. Schätzen sie unter der Voraussetzung $|f^{(4)}(x)| \leq 15, \forall x \in [-2, 2]$ den Fehler ab.

Aufgabe 6:

- (a) Gegeben sei das Polynom $p(x) = 2 - 3x + 3x^2 + 4x^3$. Bestimmen Sie die Bezier-Darstellung für $p(x)$. Berechnen Sie $p\left(\frac{2}{3}\right)$ mit dem Algorithmus von de Casteljau. Skizzieren Sie den Graphen des Polynoms sowie das Bezier-Polygon für $x \in [0, 1]$ in einem Schaubild.
- (b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos^3(x)$. Bestimmen Sie bezüglich der Knoten $x_i = \frac{2i\pi}{3}, i = 0, 1, 2$ das reelle trigonometrische Interpolationspolynom $\tau_1(x)$ zu $p(x)$. Hinweis: $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}, \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.