Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $g(x)$ im Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ genau einen Fixpunkt x^* besitzt und dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = g(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ gegen x^* konvergiert.

(b) Wieviele Iterationsschritte des Verfahrens $x_{n+1} = g(x_n)$ müssen ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ durchgeführt werden, um $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ garantieren zu können?

(c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von g und berechnen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = -1$ einen Newtonschritt.

Aufgabe 2:

(a) Gegeben seien die vier Wertepaare (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 3$:

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	0	1
y_i	-1	1	-1	-2

Zeigen Sie, dass kein Polynom zweiten Grades $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ exisitiert mit $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, 3$.

Bestimmen Sie Werte α^*, β^* und γ^* so, dass die Funktion

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) := \sum_{i=0}^{3} (y_i - (\alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2))^2,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

für α^*, β^* und γ^* ihr Minimum annimmt.

(b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (3, 2, 1)^\top$.

Aufgabe 3: Gegeben sei das Polynom $p(x) = -2 + 8x - 8x^2 + 4x^3 - x^4$.

(a) Verwenden Sie das Horner-Schema um den quadratischen Faktor $x^2 - 2x + 2$ von $p(x)$ abzuspalten.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen Kreis um 0, in dem alle Nullstellen von $p(x)$ liegen.

(c) Verwenden Sie den Satz von Sturm, um die Anzahl der Nullstellen von $p(x)$ in den Intervallen $[-1, 0]$, $[0, 1]$ und $[1, 2]$ zu bestimmen.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) - x + 1$ und die Knoten $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$.

(a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_2 zu f bezüglich der Knoten x_0, x_1, x_2 in Newton-Darstellung.

(b) Zeigen Sie für das Newton-Interpolationspolynom p_2 die Fehlerabschätzung

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216}\pi^3.$$

(c) Bestimmen Sie den kubischen Spline s zu f bezüglich des Gitters $\triangle = \{x_0, x_1, x_2\}$ mit den Randbedingungen $s''(x_0) = s''(x_2) = 0$.

Aufgabe 5:

(a) Gegeben sei das Integral $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx$ und die Knoten $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$. Bestimmen Sie dazu eine Quadraturformel mit Exaktheitsgrad 2.

(b) Von einer Funktion $f \in C^2([-2,2])$ seien folgende Funktionswerte gegeben:

$$f(-2) = -3,\ f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(2) = 1.$$

Nähern Sie das Integral $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)dx$ mit der zusammengesetzten Keplerregel unter Verwendung aller gegebenen Funktionswerte an. Schätzen sie unter der Voraussetzung $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 15,\ \forall x \in [-2,2]$ den Fehler ab.

Aufgabe 6:

(a) Gegeben sei das Polynom $p(x) = 2 - 3x + 3x^2 + 4x^3$. Bestimmen Sie die Bezier-Darstellung für $p(x)$. Berechnen Sie $p\left(\frac{2}{3}\right)$ mit dem Algorithmus von de Casteljau. Skizzieren Sie den Graphen des Polynoms sowie das Bezier-Polygon für $x \in [0,1]$ in einem Schaubild.

(b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos^3(x)$. Bestimmen Sie bezüglich der Knoten $x_i = \frac{2i\pi}{3}$, $i = 0,1,2$ das reelle trigonometrische Interpolationspolynom $\tau_1(x)$ zu $p(x)$. Hinweis: $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.