FESTSTELLUNGSPRÜFUNG in HM2

FDIBA - TU, WS 2007/08 Name:
INFORMATIK Immatrikulationsnummer:

Aufgabe 1: Zu lösen sei, durch Anwendung der Transformation von Laplace, das Anfangswertproblem 9P.

$$u^{(3)}(t) - u(t) = \int_0^t \tau^2 \cos(t-\tau)d\tau,\ u^{(3)}(0) = u^{(2)}(0) = u(0) = 1.$$

Aufgabe 2: Finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 8P.

$$x^3 u^{(3)}(x) - 3xu^{(1)}(x) + 3u(x) = x \ln x,\ x > 0.$$

Aufgabe 3: Sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\tan x}{y}, & x^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ y \neq 0 \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

Zu beweisen sei, daß $f(x,y)$ stetig in $D := \{x^2 + (y-1)^2 \leq 1\} \setminus (0,0)$ und nicht stetig im Nullpunkt ist. 9P.

Aufgabe 4; Berechne, durch Anwendung der Methode von Lagrange, die Entfernung der Ebene $\alpha : 3x - 2y - 6z = 56$ zum Nullpunkt. 6P.

Aufgabe 5: a) Zu Lösung sei, durch Anwendung der Potenzreihenmethode, das Anfangswertproblem 4P.

$$xu^{(5)}(x) + u(x) = 1 + x + x^2, u(0) = 1, u^{(4)}(0) = 1.$$

b) Bestimmen Sie, im Fall von Lösbarkeit, den Konvergenzradius der formellen Lösung. 4P.

Aufgabe 6: Sei

$$u'(x) = \mathcal{A}u(x),\ u(x) : R \longrightarrow R^3,$$

wobei

$$\mathcal{A}; = \begin{pmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 0, & 2, & -2 \\ 1, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zu lösen sei das Anfangswertproblem 4P.

$$u(0) = (1,1,1)^T.$$

b) Motiviere den Lösungsweg. 4P.

HM2 - FESTSTELLUNGSPRÜFUNG

FDIBA - TU, WS 2007/08 Name:
Allgemeiner Maschinenbau Immatrikulationsnummer:

Aufgabe 1: Gegeben sei die Differentialform

$$\mathcal{D}(x,y) := 2(x+u)dx + (2x + 2u - 2xu - x^2 - u^2)du.$$

a) Beweise, daß sie integrierenden Faktor $\mu(x,u) = \omega(x+u)$ besitzt. 4P
b) Löse in impliziter Form die Gleichung 4P.

$$\frac{\mathcal{D}(x,y)}{dx} = 0,\ u(e-2) = 2.$$

Aufgabe 2: Finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 8P.

$$x^3u^{(6)}(x) - 3xu^{(4)}(x) + 3u(x) = x\ln x,\ x > 0.$$

Aufgabe 3: Sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\tan x}{y}, & x^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ y \neq 0 \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

Zu beweisen sei, daß $f(x,y)$ stetig in $D := \{x^2 + (y-1)^2 \leq 1\} \setminus (0,0)$ und nicht stetig im Nullpunkt ist. 8P

Aufgabe 4; Berechne, durch Anwendung der Methode von Lagrange, die Entfernung der Ebene $\alpha : 3x - 2y - 6z = 56$ zum Nullpunkt. 6P

Aufgabe 5:
a) Zu Lösung sei, durch Anwendung der Potenzreihenmethode, das Anfangswertproblem 5P

$$xu^{(5)}(x) + u(x) = 1 + x + x^2, u(0) = 1, u^{(4)}(0) = 1.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der formellen Lösung. 3P

Aufgabe 6: Sei

$$u'(x) = \mathcal{A}u(x),\ u(x) : R \longrightarrow R^3,$$

wobei

$$\mathcal{A}; = \begin{pmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 0, & 2, & -2 \\ 1, & -1, & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zu lösen sei das Anfangswertproblem 5P.

$$u(0) = (1,1,1)^T.$$

b) Motiviere den Lösungsweg. 5P.

Lösungen

Januar 2008

1. Lösung: 1. Die Anwendung der traditionellen Laplace Transformation führt zu:

$$(s^3-1)\mathcal{L}(u) = 1+s+s^2+\mathcal{L}(t^2)(s)\mathcal{L}(\cos t)(s),$$

oder

$$\mathcal{L}(u) = \sum \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s^3}\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^3-1}.$$

Daraus folgt

$$u = 2\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s-1}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-1}) =$$

$$2\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(e^t)\mathcal{L}(\sin t)\frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}(e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2})\mathcal{L}(4)) := 2/\sqrt{3}L. \tag{1}$$

Die mehrfache Anwendung des Faltungssatzes ergibt

$$L = \mathcal{L}(\int_0^t e^{\kappa}\sin(t-\kappa)d\kappa)(s)\mathcal{L}(\int_0^t e^{\kappa/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\kappa)d\kappa)(s) =$$

$$\mathcal{L}(\int_0^t(\int_0^\tau e^{\kappa}\sin(\tau-\kappa)d\kappa)(\int_0^{t-\tau} e^{\kappa/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\kappa)d\kappa))(s) =$$

Abschließend (vergl.(1)) ist

$$u(t) = \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^t(\int_0^\tau e^{\kappa}\sin(\tau-\kappa)d\kappa \int_0^{t-\tau} e^{-\kappa/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\kappa)d\kappa)\, d\tau.$$

15min

1. Lösung: (2. AM). a) Gesucht ist integrierender Faktor $\mu(w(x,y))$, wobei $w(x,y)=(x+y)$.

Die Funktion μ muß, wenn sie existiert, folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{d\mu}{dw} = \int \frac{P_y - Q_x}{w_x Q - P w_y} dw. \tag{2}$$

Wir müßen eine geeignete Funktion $w(x+y)$ finden, sodaß die letzte Gleichung stimmt. Versuchen wir zunächst mit $w=(x+y)^k$, $k=1,2,\cdots$. Aus (2) folgt

$$\frac{P_y - Q_x}{w_x Q - P w_y} dw = -\frac{2}{k}\frac{x+y}{(x+y)^{k+1}} = \frac{2}{k}\frac{1}{w}dw.$$

Damit ist

$$\int \frac{d\mu}{dw} = -\frac{2}{k} \int \frac{1}{w} dw,$$

also ist

$$\mu(w) = exp(\frac{1}{k} \ln \frac{1}{w^2}).$$

Letztere gilt fü alle $k = 0, 1, \cdots$. Wir wählen $k = 1$ aus. Dann bekommen wir als geeignete Lösung

$$\mu(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

10 min

b) Es gilt

$$(\frac{1}{x+y} - 1)y'(x) + \frac{1}{x+y} = 0$$

zu lösen. Die Exakzheit muß nicht untersucht werden, denn μ ist integrierender Faktor.

Sei F eine Stammfunktion. Aus der definitionsgleichung erhalten wir

$$F(x, y) = \int \frac{2}{x+y} dx + C(y) = 2 \ln(x+y) + C(y).$$

Aus $F_y = Q$ folgt

$$\frac{2}{x+y} + C'(u) = \frac{2}{x+y} - 1, \tag{3}$$

was weiter

$$C(u) = C - u, \, C = \text{Const}$$

ergibt. Aus dem Letzteren und (2) erhalten wir

$$F(x, y) = \ln{(x+y)}^2 - y + C.$$

Der Wert der Konstante C ergibt sich aus den Anfangsbedingungen.

$$F(2, e-2) = 0, \Longrightarrow 2 \ln(2 + e - 2) - 2 + C = 0,$$

also

$$F(x, y) = 2 \ln(x + y) - y.$$

Die gesuchte Lösung $y(x)$ ist die Funktion, die implizit durch die letzte Gleichung bestimmt wird (Satz über implizite Funktionen).

10 min

2. Lösung: Setze $u(x) = x^\lambda$; gesucht wird die Zahl λ. Wie bekannt, führt dieser Ansatz zu der Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 3\lambda + 3 = 0. \tag{4}$$

Die Nullstellen sind wie folgt:$\lambda = -1, 1, 3$. Demnach sind die linear unabhängigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung die Funktionen

$$u_1(x) = x^{-1},\ u_2(x) = x^1,\ u_3(x) = x^3,\ x > 0. \tag{5}$$

Wenden wir jetzt den Ansatz $x = e^t$ an. Dadurch wird die Funktion $u(x)$ zu $v(t)$, $u(e^t) := v(t)$. Dieser Ansatz transformiert weiter den ursprünglichen Differentialoperator zu

$$\mathbb{D}(v) = te^t. \tag{6}$$

Wie bekannt, erweisen sich dann die in (4) entstandenen Nullstellen als die charakteristischen Nullstellen des charakteristischen Polynoms von (6). Das Polynom ist also

$$\mathbb{P}(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3$$

und, den Operator rekonstruieren, ekommen wir

$$\mathbb{D}(v) = v^{(6)} - 3v^{(5)} - v^{(4)} + 3v = te^t.$$

Es gilt, eine partikuläre Lösung η des Letzteren zu finden. Wenden wir den Ansatz vom Typ der rechten Seite, kommen zu

$$\eta(t) = -\frac{1}{8}t^2e^t.$$

Die allgemeine Lösung ist folglich

$$u(x) = C_1x^{-1} + C_2x^2 + C_3x^3 - \frac{1}{8}(\ln x)^2x$$

15 min

3. Lösung: Offenbar ist die Funktion $f(x, y)$ überall im offenen Gebiet stetig, denn in dieser Punktmenge ist der Nenner verschieden von der Null.

Um den Punkt $(0, 0)$ zu erörtern, untersuchen wir das Verhalten der Funktionenfolgen für zwei verschiedene Folgen $\{(x_n, y_n)\} \to 0$. Ist

$$x_n = y_n = \frac{1}{n},$$

so gilt

$$\frac{\tan 1/n}{1/n} = \frac{\sin 1/n}{1/n}\frac{1}{\cos 1/n} \to 1,\ n \to \infty.$$

Ist nun $x_n = 1/n^2$, $y = 1/n^2$, so ist $\frac{\tan 1/n}{1/n^2} \to \infty$. Beider ist aber verschieden von dem vorgegeben Wert der Funktion in $(0,0)$. Damit faellt die Stetigkeit im Nullpunkt aus. 5min

4. Lösung: Gesucht wird der minimale Wert der Funktion $F(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ auf der Menge $\alpha : 3x - 2y - 6z = 56$. Um die Rechnerei zu erleichtern, suchen wir nach $\min_\alpha (x^2+y^2+z^2)$. Wie setzen $f(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2$. Offenbar gilt

$$\sqrt{\min_\alpha f(x,y,z)} = \min_\alpha F. \tag{7}$$

Weiter folgen wir der Methode von Lagrange.

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) := \sqrt{x^2+y^2+z^2} - \lambda(3x - 2y - 6z - 56).$$

Die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

ergeben

$$-2x = 3y = z. \tag{8}$$

Nun setzen wir

$$z = 6\mu,$$

folglich ist

$$x = -3\mu,\ y = 2\mu. \tag{8}$$

Aus $\frac{\partial \mathcal{L} \partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ folgt, dass

$$\mu = -\frac{56}{49}.$$

Aus (7) und (8) folgt nun

$$\sqrt{\min_\alpha F} = \sqrt{(\frac{8}{7})^2(6^2+3^2+2^2)} = 8.$$

10min

5. Lösung: Setze

$$u(x) = \sum c_n x^n.$$

Dabei ist

$$u(0) = c_0 = 1,\ u'(0) = c_1 = 1.$$

Das Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)nc_{n+1} + c_n)x^n = 1 + x + x^2.$$

Von hier bemerk man sofort, dass das Anfangswertproblem lösbar ist. Das wäre nicht der Fall, wenn in den Anfangsbedingungen $c_0 \neq 1$ wäre. Vergleicht man die Koeffizienten für x, x^2, bekommt man

$$\begin{array}{ll} 2c_2 + c_1 = 1, & \longmapsto c_2 = 0 \\ 2.3c_3 + c_2 = 1, & \longmapsto c_3 = -1/6 \end{array}$$

Ist $n \geq 3$, so folgt

$$c_{n+1} = -\frac{c_n}{n(n+1)}.$$

Durch Anwendung der mathematischen Induktion folgt daraus die Rekursionsformel, nämlich

$$c_{n+1} = (-1)^n \frac{2}{n!^2(n+1}.$$

Der Konvergenzradius R wird nach der H'Adamarschen Formel

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}$$

berechnet. In unserem Fall ist

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = 0,$$

also $R = \infty$. 10min