Exakte Differentialformen, Eulerscher Multiplikator

Definition: Exakte Differentialformen: Die Differentialform

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{1}$$

heisst *exakt*, wenn es eine Funktion $F(x,y)$ gibt, zweimal stetig differenzierbar und derart, dass

$$f_x(x,y) = P(x,y),\ f_y(x,y) = Q(x,y).$$

Die Funktion f heisst *Stammfunktion.*

Hinreichende und genügende Bedingung für die Exaktheit einer Differentialform:

Satz von Cauchy - Riemann: Die Form (1) ist exakt genau dann, wenn

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y). \tag{2}$$

Tatsächlich, sei (1) exakt. Dann ist

$$F_x(x,y) = P(x,y)\text{und } F_y(x,y) = Q(x,y). \tag{3}$$

Der Satz von Weierstrass führt weiter zu

$$F_{x,y} = F_{y,x}$$

Setzt man hier (2) ein, so bekommen wir die gewünschte Gleichung (2).

Die hinreichende bedingung nehmen wir ohne Beweis an.

Beispiel1: Sei die Differentialform

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}dx - \arctan\frac{y}{x}dy$$

vorgegeben.
a) Ist die Differentialform exakt?
b) Wenn ja, so bestimme die Stammfunktion.

Lösung: Offenbar ist die Differentialform exakt. Wir übergehen auf b). Aus der Gleichung

$$F_x = P,$$

ergibt sich

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y),$$

wobei $C(y)$ eine Funktion in y, also von x unabhängig, ist. Wir berechnen

$$F(x,y) = x\ln\sqrt{x^2+y^2} - x + y\mathrm{arctan}\frac{x}{y} + C(y) \qquad (4).$$

Deffinitionsgemäss gilt aber

$$F_y = Q.$$

Aus (4) folgt dann durch Differenzierung nach y die Gleichung

$$-\mathrm{arctan}\frac{y}{x} = \mathrm{arctan}\frac{x}{y} + C'(y).$$

Da aber für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{arctan}\alpha + \mathrm{arctan}\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2},$$

so ergibt sich für die Funktion $C(y)$ die Gleichung

$$C'(y) = -\frac{\pi}{2},$$

also ist

$$C(y) = -y\frac{\pi}{2} + \hat{C},$$

wobei $\hat{C}$ eine Zahlenkonstante ist. Das Ergebnis für die Stammfunktion F ist (vergl. mit (4))

$$F(x,y) = x\ln\sqrt{x^2+y^2} - x + y\mathrm{arctan}\frac{x}{y} + -y\frac{\pi}{2} + \hat{C} \qquad (5).$$

Beispiel2: Löse die Differentialgleichung

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} - \mathrm{arctan}\frac{y}{x}y'(x) = 0$$

unter der Anfangswertbedingung

$$y(1) = 1. \qquad (6)$$

Lösung: Wir schreiben die Gleichung als Gleichung einer Differentialform auf. Wie wir bereits wissen, ist die Form exakt, wobei für die Stammfunktion die Darstellung (5) gilt. Nun sollen wir aus dieser Gleichung die Lösung von (6) ableiten. Nach dem Satz der impliziten Funktionen existiert eine eindeutige Funktion $y = y(x)$, derart, dass

$$F(x, y(x)) \equiv 0$$

und $y(1) = 1$. Daraus bestimmen wir die Konstante $\hat{C}$, nämlich,

$$\ln\sqrt{2} - 1 + \arctan\frac{1}{1} + -\frac{\pi}{2} + \hat{C} = 0.$$

Das ergibt

$$\hat{C} = \ln\sqrt{2} - 1. \tag{7}$$

Die Lösung ist die implizite Funktion aus (5), wobei die Konstante $\hat{C}$ nach (7) berechnet wird.

Definition: Eulerscher Multiplikator: Sei die Differentialform (1) vorgegeben. Die Funktion $\mu(x, y)$ heisst *Multiplikator von Euler*, wenn die Form

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy$$

exakt ist.

Die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, dass die Funktion $\mu(x, y)$ ein Eulerscher Multiplikator der F0rm (1) ist, folgen aus (2), nämlich

$$\mu_y(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)P_y(x, y) = \mu_x(x, y)Q(x, y) + \mu(x, y)Q_x(x, y). \tag{8}$$

Wir untersuchen folgende Fälle: Ist $\mu(x, y)$ eine Funktion nur in x, so muss

$$\mu(x)(P_y(x, y) - Q_x(x, y)) = \mu'(x)(x, y)Q(x, y). \tag{9}$$

Ist $\mu(x, y)$ eine Funktion nur in y, so muss

$$\mu(y)(Q_x(x, y) - P_y(x, y)) = \mu'(y)(x, y)P(x, y). \tag{10}$$

Verbleiben wir bei dem Fall, wo μ Funktion einer Variablen ist, also $\mu = \mu(w)$, und w ihrerseits Funktion in x, y ist. Aus (8) ergibt sich dann die Definitionsgleichung

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{w_y P - w_x Q}. \tag{11}$$

Beispiel3: Beweise, dass

$$(\frac{\sin(x + y)}{1 + x} + \cos(x + y))dx + \cos(x + y)dsdy$$

einen Eulerschen Multiplikator der Form $\mu 0 \mu(x)$ besitzt. Löse daraufhin die Differentialgleichung

$$(\frac{\sin(x + y)}{1 + x} + \cos(x + y)) + \cos(x + y)dsy'(x) = 0,\ y(0) = 0.$$

Lösung: Wenn es so eine Funktion $\mu(x)$ gibt, so erfüllt sie (9), also gilt

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

Ausgeschrieben ergibt das

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{1+x}.$$

Daraus folgt

$$\mu(x) = 1 + x.$$

(Wir beschränken uns auf den Fall, wenn $1 + x, \mu(x) > 0$. Den weiteren Vorgang des Problems überlassen wir dem Leser.

Beispiel4. Beweise, dass die Differentialform

$$2(x+y)dx + (2x + 2y - 2xy - x^2 - y^2)dy$$

einen Eulerschen Multiplikator der Form $\mu(x,y) = \mu(x+y)$ besitzt.
Lösung: Nehme an, dass es einen Multiplikator wie oben gibt. Wir suchen $w(x,y)$ als $w(x,y); = x+y$, also ist $w_x = w_y = 1$. Das führt nach (11) zu der Gleichung

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-2x-2y}{-2xy - x^2 - y^2},$$

also

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{2}{x+y}$$

und

$$\mu(x.y) = (x+y)^2.$$