ЛАБОРАТОРНО УПРАЖНЕНИЕ № 2

ОПТИМИЗИРАНЕ НА КОНЦЕНТРАТОРНИ МРЕЖОВИ СТРУКТУРИ

2.1. Определяне обхвата на терминалите

При зададена съвкупност от терминали и концентратори, всички терминали трябва да се свържат към някой от концентраторите. Ограничителните условия са:

- капацитетът на концентратора, т.е. колко терминала най-много могат да се свържат към даден концентратор;
- най-ниска цена на мрежата при известни цени между всички терминали и концентратори;
- всеки терминал може да се свърже точно към един концентратор.

Пример 1: Зададени са пет възможни концентратора: ***A, B. C, D*** и ***E***, както и осем терминала: ***1, 2, 3, 4, 5, 6, 7*** и ***8***. Трябва да се определи мрежа, която свързва всички терминали към някой от концентраторите. Максималният капацитет на концентраторите е 2.

Алгоритъм на решението:

- Създава се таблица с всички цени между концентраторите и терминалите.
- Избира се най-евтината връзка за първия ред и се резервира.
- Продължава се по-надолу по-редове и ако капацитетът на концентратора е вече изчерпан се избира друга „най-евтина” връзка.
- След като са определени най-ниските цени по всички редове резултатите се сумират и се получава крайната цена:

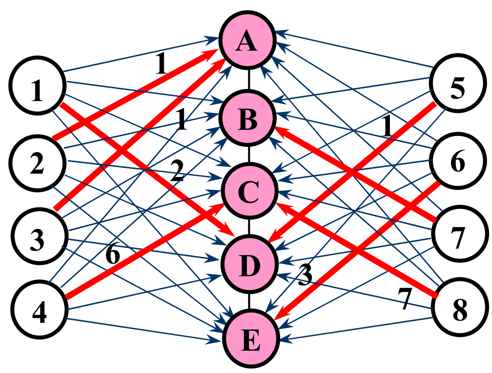
$$C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} x_{ij} C_{ij} \ , (i = 1,2,....,n) ; \ (j = 0,1,....,m) \qquad (2.1)$$

където n=8 е броя на терминалите, m=5 - броя на концентраторите, k_j е капацитета на концентратора, а $\sum_{j=0}^{m} x_{ij} = 1$ и $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le k_j$.

Решението по показания алгоритъм е показано на таблицата по-долу.

концентратори

терминали	A	B	C	D	E
1	4	4	7	**2**	6
2	**1**	3	5	4	1
3	**1**	2	1	3	2
4	3	7	**6**	8	6
5	2	6	2	**1**	3
6	3	9	4	2	**3**
7	6	**2**	3	4	3
8	2	8	**7**	5	9



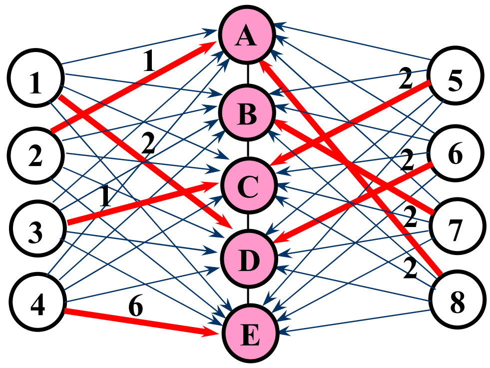
Общата цена е 23=2+1+1+6+1+3+2+7

Очевидно това не е оптималното решение, защото поради изчерпване на капацитета на концентратор **A** сме длъжни да свържем терминал **4** към концентратор **C** за **6**, вместо за концентратор **A** за **3**.

Повтаряме опита за намиране на най-добро решение, като разбъркаме таблицата по редове:

концентратори

терминали	A	B	C	D	E
8	**2**	8	7	5	9
2	**1**	3	5	4	1
4	3	7	6	8	**6**
6	3	9	4	**2**	3
1	4	4	7	**2**	6
7	6	**2**	3	4	3
3	1	2	**1**	3	2
5	2	6	**2**	1	3

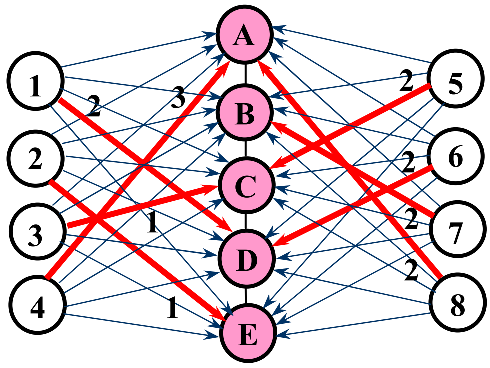


Общата цена е 18=2+1+6+2+2+2+1+2

Ако разбъркаме таблицата и по колони се получава следното решение:

концентратори

терминали	E	B	C	D	A
8	9	8	7	5	**2**
2	**1**	3	5	4	1
4	6	7	6	8	**3**
6	3	9	4	**2**	3
1	6	4	7	**2**	4
7	3	**2**	3	4	6
3	2	2	**1**	3	1
5	3	6	**2**	1	2



Общата цена е 15=2+1+3+2+2+2+1+2

Общата цена на това решение е: 15, но то все още не е гарантирано най-доброто. Този метод дава само начин за търсене на локален екстремум. За това трябва да се направят няколко решения и да се намери най-доброто от тях.

2.2. Метод ADD

Тук има множество от възли. Всички (или поне достатъчно много) възли могат да бъдат концентратори. В общия случай, не се задава капацитет на концентраторите и отново се търси възможно най-ниската цена, но при допълнителното условие концентраторите да са свързани. Как са свързани е въпрос на задание, но най-често е всеки със всеки, така че максималният път между 2 терминала да минава през два транзитни възела, т.е. най-много през два концентратора.

Алгоритъмът се състои в следното, избира се един възел, който се приема за основен концентратор. Изчислява се цената на мрежата при свързване на всички възли към този основен концентратор. След това се избира по случаен принцип още един възел, който може да е концентратор и се добавя (съседна колона) до основния концентратор. Избира се оптималното решение, към което се добавя цената на връзката между двата концентратора – основен и първи допълнителен. Цената се сравнява с тази от първото решение, и ако е по-добра се избира още един (втори допълнителен) концентратор и операциите се повтарят. Ако се окаже, че третото решение е с по-висока цена от второто, изпълнението на задачата се прекратява и второто се приема за оптимално. Ако третата цена е по-добра от втората се добавя още един концентратор и така докато се получи цена по-висока от предишната. Когато се стигне до това, за оптимална се взима предишната цена. Естествено решенията са много на брой, защото възможностите за случайно избиране на следващи концентратори са много. За това и тук е удачно да се направят няколко решения и да се избере най-добрия локален екстремум.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	0	2	6	5	9	7	1	4
2	2	0	3	4	2	5	3	2
3	6	3	0	3	8	4	1	9
4	5	4	3	0	5	2	3	3
5	9	2	8	5	0	9	3	4
6	7	5	4	2	9	0	2	4
7	1	3	1	3	3	2	0	2
8	4	2	9	3	4	4	2	0

Пример 2: Зададени са 8 възела с дадените в таблицата цени на връзките между всички тях. Да се намери оптималната мрежа по метода ADD. Възел **3** задължително трябва да бъде концентратор.

Решение:

Стъпка 1:

Избираме възел **3** за концентратор, чиято колона дава цените на връзките на всички останали възли с него. Общата цена е 34=6+3+3+8+4+1+9.

Стъпка 2:

Освен възел **3**, добавяме като втори концентратор и възел **5**. Всички останали възли се свързват към онзи от двата концентратора, които предоставя за конкретния възел по-евтина връзка. Цената на връзките от всички терминали до концентратор е 20=6+2+3+4+1+4. Общата цена ще се получи като се добави и цената на връзката между двата концентратора **3** и **5**, която е 8. Тя ще бъде 28=20+8.

Стъпка 3:

Добавяме трети концентратор – възел 8. Обща цена е 35=14+21. Второто събираемо 21 се формира от цените на връзките между трите концентратора, които се свързват всеки със всеки. Очевидно цената, получена на тази стъпка е по-висока от предишната. Избираме предишното решение, от стъпка 2 като най-добро.

Стъпка 1

	3
1	6
2	3
3	0
4	3
5	8
6	4
7	1
8	9

Обща цена: **34**

Стъпка 2

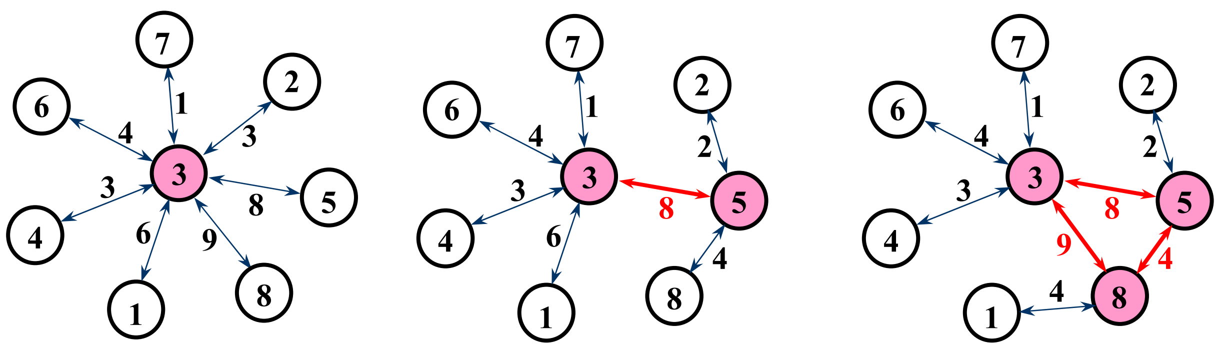
	3	**5**
1	6	9
2	3	2
3	0	8
4	3	5
5	8	0
6	4	9
7	1	3
8	9	4

28

Стъпка 3

	3	**5**	**8**
1	6	9	4
2	3	2	2
3	0	8	9
4	3	5	3
5	8	0	4
6	4	9	4
7	1	3	2
8	9	4	0

35



2.3. Метод DROP

Този метод е обратен на метода ADD. При него първо се намира цената при свързването на всички възможни концентратори. При всяка следваща стъпка се изважда един концентратор и се търси по-добра цена. Тогава се връща една стъпка назад.

Не може да се каже, кой от двата метода е по-удачен, защото е възможно при метода ADD да се достигне до оптимално решение непосредствено преди изчерпване на всички възможности за допълнителни концентратори.

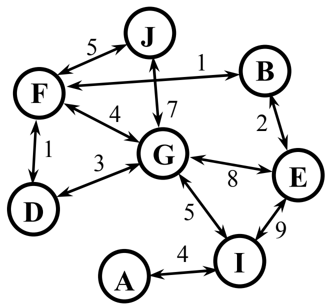
2.4. Минимално свързващо дърво (MST - Minimum Spanning Tree)

Свързващо дърво на един свързан граф е частичен граф, който съдържа всички възли. ***Минимално свързващо дърво*** (MST) на един свързан граф е свързващо дърво, чиято сума от теглата на ребрата е оптимална (най-малка или най-голяма).

MST на даден граф може да се намери с алгоритъма на Краскъл (Kruskal) или чрез алгоритъма на Прим (Prim), които ще разгледаме чрез следния пример:

Пример 3: Да се намери MST за мрежата от фиг. 2.1 при минимална сума на тегловните коефициенти на линиите по:

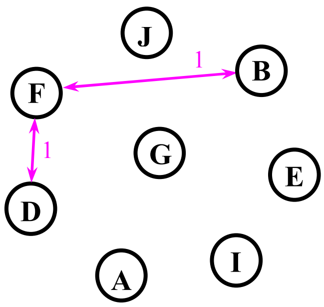
- ❖ алгоритъма на Краскъл;
- ❖ алгоритъма на Прим.



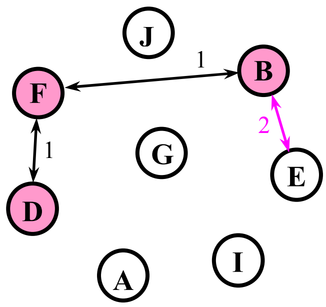
Фиг. 2.1 Примерна мрежа с тегловнти коефициенти на линиите

Решение:

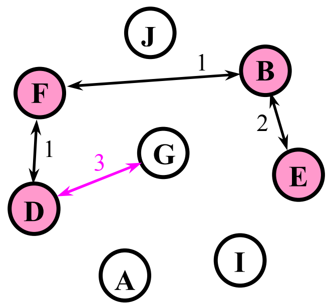
Алгоритъм на Краскъл:



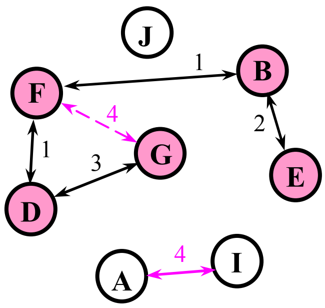
стъпка 1



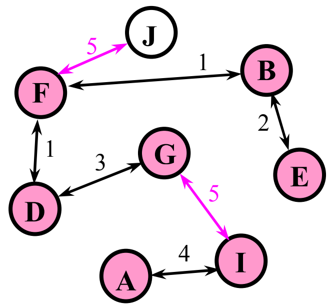
стъпка 2



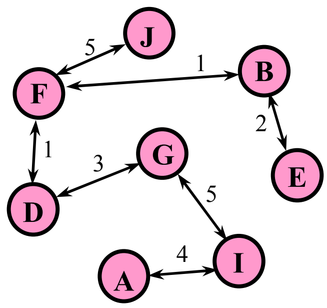
стъпка 3



стъпка 4



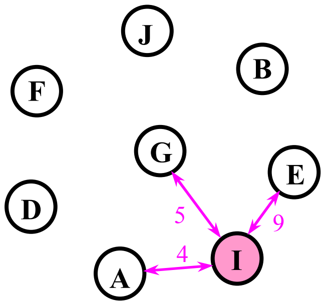
стъпка 5



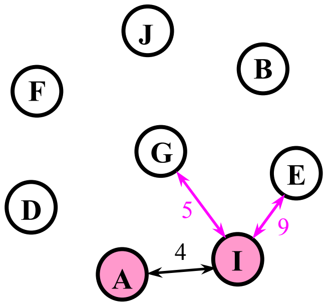
стъпка 6

Едно след друго се добавят ребрата по нарастващ ред на тегловните им коефициенти. Започваме с ребрата между възли D и F и възли B и F, и двете с тегло 1 (стъпка 1). Трите възела D, B и F вече са част от бъдещото минимално свързващо дърво (MST). Следващият по големина тегловен коефициент е 2 за BE (стъпка 2). Присъединен е и възел E. Следва реброто DE с коефициент 3, възел G е вече част от минималното свързващо дърво. Ребрата с тегловен коефициент 4 са две FG и AI. Първото не присъединява възел към дървото и отпада, второто свързва възел A и възел I, (стъпка 4). С коефициент 5 отново са две ребра GJ и GI. Реброто GJ присъединява към дървото възел J, а GI – отделената до сега двойка възли AI (стъпка 5). Минимално свързващо дърво на мрежата от фиг.2.1 по метода на Краскъл е дадено на стъпка 6.

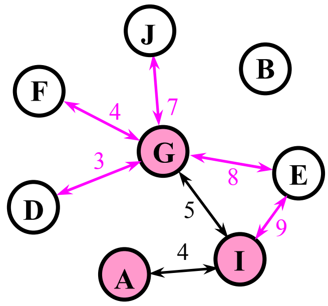
<u>*Алгоритъм на Прим:*</u>



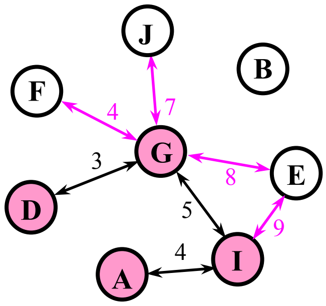
стъпка 1



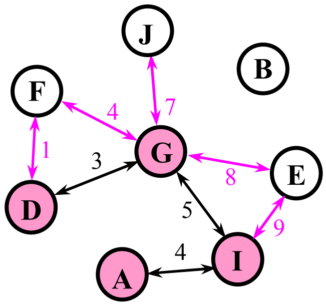
стъпка 2



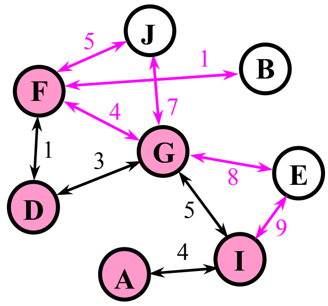
стъпка 3



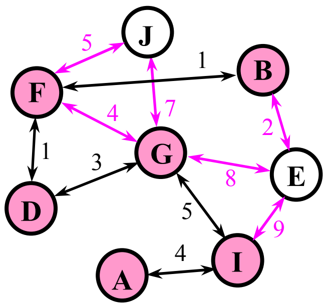
стъпка 4



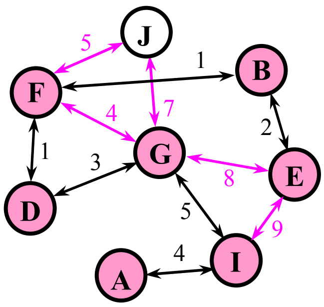
стъпка 5



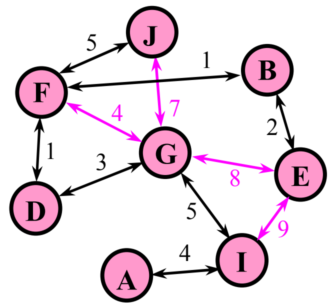
стъпка 6



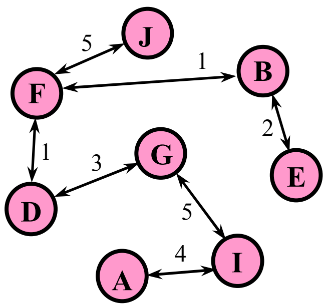
стъпка 7



стъпка 8



стъпка 9



стъпка 10

Този алгоритъм изисква да се зададе начален възел. Нека това да бъде възел I (стъпка 1). Търси се ”най-евтината” връзка от началния възел I към всички останали. Той е свързан с възел A (тегло 4), възел G (тегло 5) и към възел E (тегло 9). Избираме по-евтината към възел A (стъпка 2). Дървото вече се състои от два възела – A и G. Отново търсим най-евтината връзка от кой да е от тях до останалите възли, неприобщени все още към дървото. Изборът е I-G (тегло 5), I-E (тегло 9). Линия I-G с по-малкия тегловен коефициент 5 включва възел G към дървото (стъпка 3). Сега избираме най-евтината сред връзките на трите включени възела към невключените и т.н. Стъпка 10 изобразява минимално свързващо дърво на мрежата от фиг.2.1 по метода на Прим. Очевидно и по двата метода се получи един и същи резултат.

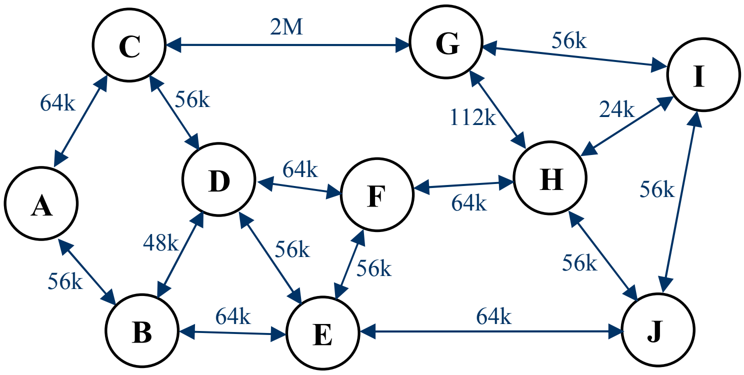
2.5. Задача за изпълнение

Дадена е телекомуникационната мрежа от фиг.2.2. Всички линии са двупосочни с еднакви скорости в двете посоки в kbit/s, отразени в табл. 2.1. За несъществуващите линии скоростите са нули.

Търси се оптималната мрежа (с маскимални скорости на предаване), като задължително възел **F** трябва да бъде първият концентратор..

Ограничителните условия са:

- Всеки от възлите в мрежата трябва да бъде или терминал или концентратор, така, че да има път с произволен ранг мужду всеки два възела.
- Неограничен капацитет на на концентраторите, т.е. към даден концентратор могат да се свържат неограничен брой терминали. Всеки терминал може да се свърже точно към един концентратор.
- При зададените скорости на предаване между всички терминали и концентратори да се построи възможно най-бързата мрежа. Това да се постигне с минимален брой концентратори.
- Да има път от произволен ранг от всеки концентратор до всички останали концентратори, т.е. не е необходимо те да бъдат свързани всеки с всеки.



фиг. 2.2 Конфигурация на телекомуникационна мрежа

Табл. 2.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	**56**	**64**	0	0	0	0	0	0	0
B	**56**	0	0	**48**	**64**	0	0	0	0	0
C	**64**	0	0	**56**	0	0	**2000**	0	0	0
D	0	**48**	**56**	0	**56**	**64**	0	0	0	0
E	0	**64**	0	**56**	0	**56**	0	0	0	**64**
F	0	0	0	**64**	**56**	0	0	**64**	0	0
G	0	0	**2000**	0	0	0	0	**112**	**56**	0
H	0	0	0	0	0	**64**	**112**	0	**24**	**56**
I	0	0	0	0	0	0	**56**	**24**	0	**56**
J	0	0	0	0	**64**	0	0	**56**	**56**	0

Решение

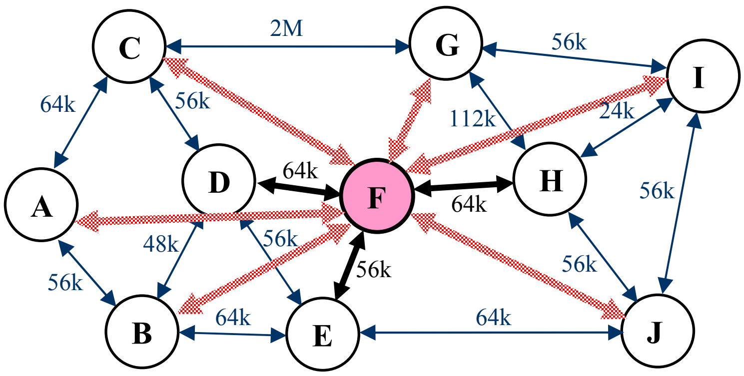
Ще бъде представено решение по метода на добавянето ADD. Възможни са два начина на прилагане на метода: в чистия му вид с търсене на минимум и модифициран, като се търси максимума на пропускателната способност. В първия случай работим с тегла на ребрата на графа и се търси минимално тегло (цена). За да се премине от скорости към тегла, при положение, че линията с по-голяма скорост е по-предпочитана, теглата могат да се получат като реципрочната стойност на съответната линия. Естествено скоростта на несъществуващи линии е нула и респективно тяхното тегло става безкрайност. Тъй като повечето програми работят с реални крайни числа, тези стойности могат да се заместят с някое голямо число, което да е с няколко порядъка по-голямо от тези на съществуващите линии. Другият начин за използване на ADD е, който и ще бъде показан по-долу, е като се търси максимум. Това обаче е специфично решение и неприложимо при използване на готови програмни продукти с търсене на минимум.

Показното по-долу решение няма да бъде оптималното, поради не добре обмисления начин за добавяне на всеки следващ концентратор. Целта е концентраторите да бъдат минимален брой, а сумата от скоростите на линиите между тях, както и между концентратори и възли да бъде максимална.

Стъпка 1:

Възел F е избран за концентратор и тъй като е единствен, към него като терминали се свързват всички останали възли на мрежата. Топологията на мрежата предоставя реални връзки само със съседните му възли – D, E и H. С всички останали възли липсват реални линии, т.е. скоростите на предаване от F към всички тях са нули. Общата скорост на предаване и 184kbit/s.

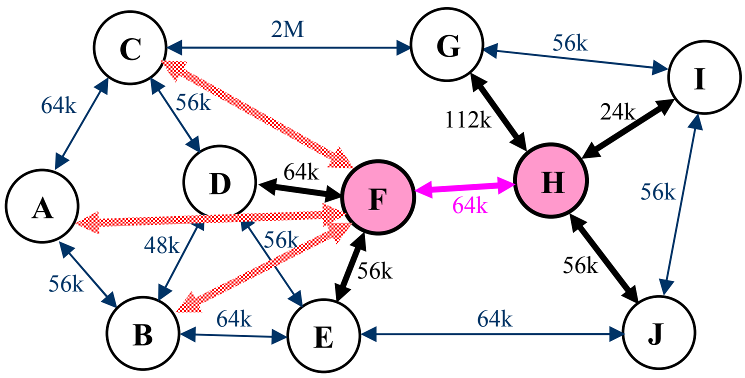
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
F	0	0	0	**64**	**56**	0	0	**64**	0	0	**184**



Стъпка 2:

Добавяме като втори концентратор възел H. Той приобщава като терминали възлите G, I и J. Все още няма реални линии от възлите A, B и C към нито един от двата концентратора, т.е. те са извън мрежата до момента. Между двата концентратора има директна връзка със скорост 64 kbit/s. Сумата на всички връзки от терминалите до избраните от тях концентратори е 312 kbit/s, към която дабавяме линията, свързваща двата концентратора. Общата скорост на включените до момента в мрежата линии е 376 kbit/s.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
F	0	0	0	**64**	**56**	0	0	**64**	0	0	
H	0	0	0	0	0	**64**	**112**	0	**24**	**56**	
max=	0	0	0	**64**	**56**	0	**112**	0	**24**	**56**	**312**
										+FH	**64**
											376



Стъпка 3:

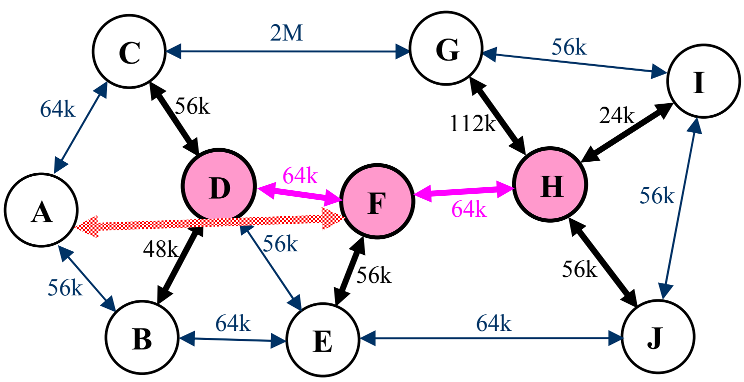
Избираме възел D за трети концентратор. Той приема за свои терминали възлите B и C, към които има реални изградени линии. Възел E също е свързан с новия концентратор D и би могъл да се откаже от концентратор F, към които е свързан сега. Това е безсмислено, тъй като D му предлага същата скорост на предаване, каквато и F. Не свързан с концентратор чрез реална линия остава само възел A. Новият концентратор D се свързва с концентратор F, тъй като между тях има реална линия (64 kbit/s), каквато липсва между D и H.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
F	0	0	0	**64**	**56**	0	0	**64**	0	0	
H	0	0	0	0	0	**64**	**112**	0	**24**	**56**	
D	0	**48**	**56**	0	56	64	0	0	0	0	
max=	0	**48**	**56**	0	**56**	0	**112**	0	**24**	**56**	**352**

+FH **64**

+FD **64**

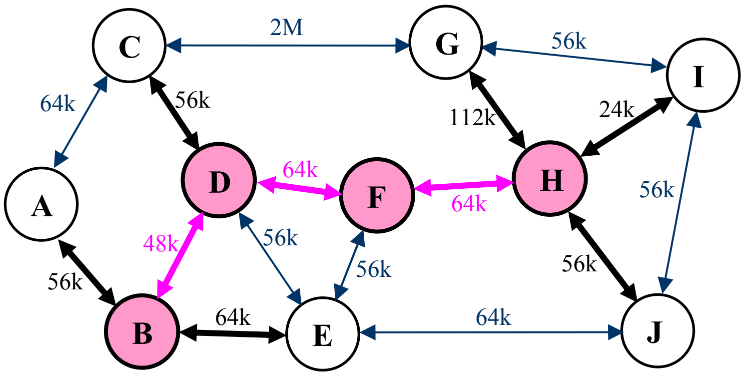
480



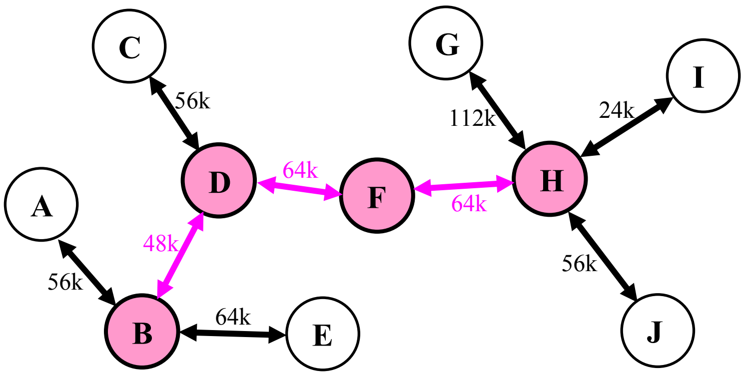
Стъпка 4:

Добавяме концентратор B. Той привлича два терминала – A, който не е бил свързан с реална линия към концентратор до сега, и E който ще се откаже от връзката 56 kbit/s към концентратор F заради по-високоскоростната 64 kbit/s към новия концентратор B.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
F	0	0	0	**64**	56	0	0	**64**	0	0	
H	0	0	0	0	0	**64**	**112**	0	**24**	**56**	
D	0	**48**	**56**	0	56	**64**	0	0	0	0	
B	**56**	0	0	**48**	**64**	0	0	0	0	0	
max=	**56**	0	**56**	0	**64**	0	**112**	0	**24**	**56**	**368**
										+FH	**64**
										+FD	**64**
										+DB	**48**
											544



Вече всички възли в мрежата или са станали концентратори (F, H, D и B) или са терминали, който са си избрали концентратор към който да се свържат (A, C, E, G, I и J). Сумарната скорост на линиите между терминалите и концентраторите им е 368 kbit/s. Когато към нея се добавят скоростите на предаване на линиите, свързважи концентраторите се получава общата сумарна скорост за мрежата 544 kbit/s. Концентраторите са свързани така, че от всеки един може да се стигне до всеки от останалите, без значение през колко концентратора се преминава.



Задачата беше решена при избор на 4 концентратора. Решението не е оптимално, дори само защото в мрежата не е включена най-високоскоростната линия CG със скорост 2Mbit/s.

За същата телекомуникационна мрежа от фиг. 2.2:

1. **Намерете по-добро решение по метода ADD от предложеното при същите начални ограничителни условия.**
2. **Решете задачата и по метода DROP, при което очевидно изискването възел F да бъде първи концентратор трябва да отпадне.**
3. **Определете и начертайте минималното свързващо дърво (MST) на мрежата по:**
   - **алгоритъма на Краскъл;**
   - **алгоритъма на Прим, ако началният възел е H.**