ЛАБОРАТОРНО УПРАЖНЕНИЕ № 1

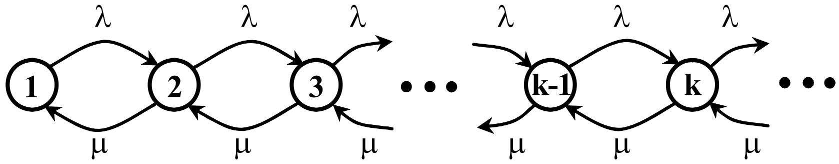
МОДЕЛИРАНЕ НА СИСТЕМИ С ЧАКАНЕ

1.1. Системи с чакане (опашкови системи) - основна теория

Системите с чакане се характеризират с:

- ❖ Брой на обслужващите елементи]
- ❖ Дисциплина на обслужването – FIFO (First In First Out), LIFO (Last In First Out) и др.;
- ❖ Размер на буферната памет;
- ❖ Вероятностна функция на времето между две последователни заявки, т.е. интензивност на постъпване на заявките - λ;
- ❖ Вероятностна функция на времето за обслужване, т.е. интензивност на обслужване на заявките - μ.

Телекомуникационните системи много често се моделират като мрежи с опашкови системи. Най-често приемания случай за опашковите системи, е един обслужващ елемент, безкрайно много места за чакане и константни във времето интензивности на постъпване и обслужване на заявките. При така направените допускания за една опашкова система се получава моделът от фиг. 1.1



Фиг. 1.1 Модел на опашкова система

При пристигането на заявка системата преминава в състояние на "една заявка повече в опашката", т.е. в модела от фиг. 1.1 се заема съседното състояние в дясно. При обслужването на една заявка системата преминава в състояние на "една заявка по-малко в опашката", т.е. в модела се заема съседното състояние в ляво.

Средното време за престой на една заявка в опашката се получава използвайки формулата на Литъл:

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}. \tag{1.1}$$

Ако означим вероятността в опашката да има i чакащи обслужване заявки с P_i, където $i \in [0, \infty)$, то при i=0 се получава вероятността в опашката да няма заявки, чиято стойност е:

$$P_0 = \frac{\mu - \lambda}{\mu}. \tag{1.2}$$

Очевидно, за да бъде стойността на вероятността P_0 между 0 и 1, трябва $\mu > \lambda$, т.е. интензивността на обслужване трябва да е по-голяма от интензивността на постъпване на заявките. Вероятността в опашката да има точно k чакащи обслужване заявки P_k ще бъде:

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k. \tag{1.3}$$

Тези равенства са валидни, ако е изпълнено допълнителното условие:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1. \tag{1.4}$$

1.2. Мрежи с M/M/1 опашкови системи

Нека с a да означим средната дължината в битове (bit) на пренасяните пакети. Тогава валидно е следното: $\alpha = 1/a$, (bit/пакет).

Пропускателната способност на линиите в мрежата е зададена и се измерва в bit/s. Ако за i-тата линия я означим с C_i, то честотата на обслужените пакети за една секунда по i-тата линия ще се определи така:

$$\mu_i = \alpha C_i \text{, пакет/s,} \tag{1.5}$$

където $\alpha = 1/a$, (bit/пакет)

Нека λ_i е броят на пакетите, които се предват по линията i в рамките на една секунда, т.е. броя на живите пакети. Тогава, логично, броят на живите пакети в цялата мрежа за една секунда, ще бъде сумата от пакетите, предавани по всичките m линии на мрежата за единица време (1s):

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ . \tag{1.6}$$

Ако се ползват най-късите маршрути λ е минимално. За времето на закъснение на i-тата линия се получава:

$$T_i = \frac{1}{\alpha C_i - \lambda_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i} \text{, s.} \tag{1.7}$$

Вижда се, че ако големината на пакетите a расте, то честотата на обслужените пакети за една секунда по i-тата линия μ_i намалява, а времето на закъснение T_i расте.

Освен пропускателната способност на линиите C_i за дадена мрежа се задава и броя на пакетите, които се пращат от възел i до възел j $(i \neq j)$ за 1s - γ_{ij} .

Броят на пакетите, които се „раждат” (адресират) в рамките на една секунда в мрежа с n възела е:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ . \tag{1.8}$$

Средния брой линии, през които премината едно съобщение (хопове) е:

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\gamma} \tag{1.9}$$

Очевидно за пълносвързана мрежа (всеки с всеки) $\bar{n} = 1$.

За да се определи средното закъснение на една коя да е линия е необходимо да се вземе предвид първо какво е закъснението ѝ и второ колко често тази линия участва в избраните маршрути. Така може да се получи, че една линия, която има сравнително голямо закъснение, но не се използва често няма да доведе до увеличаване на средното време за пренасяне на едно съобщение и обратно. Следователно за средното време на закъснение за една линия се получава:

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i T_i \tag{1.10}$$

$\dfrac{\lambda_i}{\lambda}$ се нарича коефициент на използване на линия i.

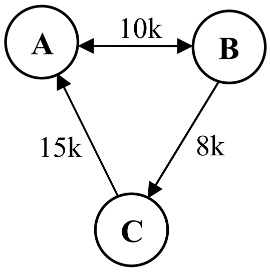
След като вече е известно как може да се определи средния брой линии $\bar{n}$, през които преминава едно съобщение и средното закъснение на една линия $\bar{T}$, лесно може да се определи средното закъснение на пакет в мрежата:

$$T = \bar{n}.\bar{T} \ . \tag{1.11}$$

Нека разгледаме следния пример:

<u>Пример:</u> Скоростите на съответните линии за мрежата от фиг. 1.2 са нанесени върху графа. Трафичният интерес за всяка двойка възли и маршрутите са дадени в табл. 1.1. Големината на пакет в мрежата е 800 bit.

Да се определи средното време на закъснение на пакет в мрежата, T, ms.



фиг. 1.2

табл. 1.1

от възел \ към възел	A	B	C
A		6 AB	3 ABC
B	6 BA		4 BC
C	7 CA	2 CAB	

Решение:

На фиг. 1.2 е дадена конфигурацията на телекомуникационната мрежа, а табл. 1.1 задава трафичния интерес за всички двойки възли и маршрутите. Числата са броят пакети, предавани по маршрута, записан под тях.

За да изчислим средното време на закъснение на пакет в мрежата, съставяме табл. 1.2.

Табл.1.2

№	линия	λ_i, (бр.)	C_i, (bit/sec)	$\mu_i = \alpha C_i$, (пакет/sec)	$T_i = 1000/(\mu_i - \lambda_i)$, (ms)	$T_i\ \lambda_i$
1	AB	11	10 000	12,5	666,67	7333,37
2	BA	6	10 000	12,5	153,85	923,1
3	BC	7	8 000	10	333,33	2333,31
4	CA	9	15 000	18,75	102,56	922,04

$\lambda = 33$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{4} T_i \lambda_i = 11512{,}82$

Конфигурацията на мрежата от фиг. 1.2 има 4 бр. линии, (т.е. m=4) изброени във втората колона на табл.1.2. Еднопосочните стрелки показват, че линии AC и CB не съществуват. При определянето на линиите за дадена мрежа се препоръчва изброяването им като се започне от възел A към всички останали възли, след това от възел B към останалите възли и т.н.

Броят пакети, предавани по линията i за 1s λ_i се отчитат от табл.1.1. Например, за линията AB се сумират пакетите на всички маршрути, съдържащи тази линия, те са маркирани в табл. 1.1 и са 6+3+2=11 бр. пакети. Аналогично те се определят и за останалите три линии, след което сумирането им дава броят на всички пакети в мрежата за 1 sec:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 11 + 6 + 7 + 9 = 33, \text{ пакета/s.}$$

Пропускателната способност на четирите линии C_i се отчита от фиг.1.1. Да се има предвид, че означенията са както следва 10k=10 000 bit/s.

Обслужените пакети μ_i за 1s във всяка една линия се определят по (1.5) $\mu_i = \alpha C_i$, където $\alpha = \frac{1}{a} = \frac{1}{800} = 0{,}00125$, е реципрочната стойност на броя битове в пакет, зададени по условие.

Следва да се изчисли средното време на закъснение на пакет за всяка една от линиите. По (1.7) се изчислява в секунди, а в милисекунди, за i-тата линия то ще бъде $T_i = \dfrac{10^3}{\mu_i - \lambda_i}$.

Изчисляването на средното време на закъснение за една линия $\overline{T}$ (1.10) се улеснява, като в отделна колона на табл. 1.2 се пресметнат първо произведенията $\lambda_i T_i$ за всяка една от линиите, а след това и тяхната сума. Окончателно за средното време на закъснение на линия в мрежата се получава: $\overline{T} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i T_i = \frac{1}{33} \cdot 11512{,}82 = 348{,}87 ms$.

Средният брой линии $\overline{n}$, през които преминава едно съобщение, се получава като първо определим броя на всички пакети, които се „раждат” в мрежата γ. Това е сумата от всички стойности от таблицата, показваща трафичния интерес (табл. 1.1): $\gamma = 6+3+6+4+7+2 = 28$. Едно съобщение ще преминава средно през $\overline{n} = \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{33}{28} = 1{,}178$ линии.

Вече можем да изчислим търсеното средно време на закъснение на пакет в мрежата, измерено в ms: $T = \overline{n} \quad \overline{T} = 1{,}178.348{,}87 = 410{,}97 ms$.

1.3. Задача за изпълнение

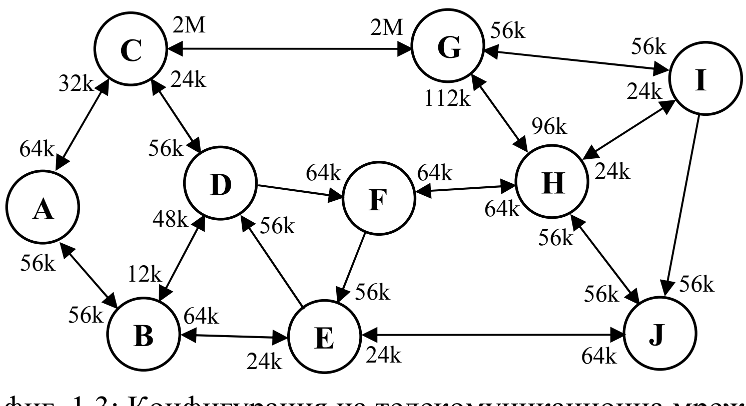
Дадена е телекомуникационната мрежа със съответните скорости на отделните линии, фиг. 1.3. Някои от линиите са еднопосочни! Трафичният интерес и маршрутите за достигане от всеки възел до всички останали са зададени в табл.1.3.

- Да се определи средното време на закъснение *T*, ms на един пакет в дадената мрежа, ако големината на един пакет е 1000 bits.
- Работеща ли е мрежата и ако не да се дефинира проблемът и да се предложат поне три възможни решения за отстраняването му.
- Да се определи средното време на закъснение *T*, ms на пакет в мрежата, след необходимата минимална промяна на скоростите на предаване за претоварените линии.
- Да се определи как влияе големината на пакетите върху средното закъснение на пакет в мрежата и да се определи пределната големина на пакет без да се допуска претоварване. Да се определи дължината на пакета, при която средното време на закъснение на пакет в мрежата спада под 20 ms. Променяйте дължината на пакета *a* през 10 bit.

<u>Указания за изпълнение на задачата</u>:

Препоръчителна програма за изпълнение на задачата е програма Excel.

Всички необходими изчисления да се направят като се кодират необходимите формули и попълнят съответните таблици в програма Excel. За не целочислените стойности да се работи с точност два знака след десетичната запетая. Средното време на закъснение *T* на един пакет в мрежата да се изчисли в ms.



фиг. 1.3: Конфигурация на телекомуникационна мрежа

Табл. 1.3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		10 AB	8 AC	8 ABD	7 ABE	9 ABDF	10 ACG	6 ACGH	3 ACGI	4 ACGIJ
B	8 BA		4 BDC	2 BD	5 BE	4 BDF	7 BDCG	5 BEJH	3 BEJHI	2 BEJ
C	4 CA	9 CAB		3 CD	11 CDFE	7 CDF	1840 CG	22 CGH	25 CGI	12 CGIJ
D	4 DBA	6 DB	2 DC		12 DFE	5 DF	5 DCG	3 DFH	2 DCGI	4 DFHJ
E	31 EBA	3 EB	1 EDC	36 ED		3 EDF	1 EDCG	15 EJH	8 EJHI	35 EJ
F	6 FEBA	3 FEB	26 FHGC	2 FED	4 FE		4 FHG	11 FH	6 FHI	3 FHJ
G	25 GCA	9 GCAB	1800 GC	2 GCD	5 GHFE	20 GHF		23 GH	3 GI	3 GIJ
H	13 HGCA	8 HFEB	30 HGC	22 HGCD	3 HFE	2 HF	7 HG		3 HI	37 HJ
I	1 IGCA	4 IJEB	22 IGC	8 IGCD	10 IJE	12 IJHF	5 IG	8 IH		8 IJ
J	3 JEBA	2 JEB	5 JHGC	1 JED	3 JE	6 JHF	4 JHG	3 JH	2 JHI	

Решение:

Попълнете в следната таблица наименованията, аналитичните зависимости (формула) и дименсията на следните величини:

Величина - наименование	означение	формула	дименсия
брой линии в мрежата	m	-	бр.
	n	-	
	λ_i	-	
	λ		
	C_i	-	
	μ_i		
	T_i		
	a	-	
	α		
	$\overline{T}$		
	$\overline{n}$		
	γ	-	
	T		

❖ **Да се определи средното време на закъснение *T*, ms на един пакет в дадената мрежа, ако големината на един пакет е 1000 bits.**

За телекомуникационната мрежа от фиг. 1.3 определете всички линии, изчислете параметрите за дължина на пакета a=1000bit, (α=__________) и попълнете табл. 1.4.

табл.1.4

№	линия	λ_i, бр.	C_i, bit/s	μ_i =_____,бр	T_i =__________,ms	$T_i\ \lambda_i$
1	AB	52	56000	56	250.00	13000.00
2	AC	31	32000			
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
		$\lambda=\Sigma\lambda_i=$				$\Sigma\lambda_i T_i=$

Трафикът (броят пакети λ_i) и маршрутите между възлите (абонатите) са представени в табл. 1.3. Например, от възел **A** до възел **E** се предават 7 пакета по маршрута **ABE**.

За всяка една линия се сумират пакетите, от всички маршрути, съдържащи тази линия. Например, за линия AB, в табл. 1.3 маркираме всички маршрути, в които тя участва и сумираме пакетите за всички тези маршрути: AB+ ABD+ ABE+ ABDF+ CAB+ GCAB

10 + 8 + 7 + 9 + 9 + 9 = 52 = λ_1

Скоростта на предаване (пропускателната способност) по i-тата линия C_i се отчита от графа на телекомуникационната мрежа (фиг. 1.3), като 24k=24000 bit/s, а 2M= 2 000 000 bit/s.

Последните три колони от табл. 1.4 се изчисляват по съответните формули.

Брой линии в мрежата m = ___________

Брой живи пакети в мрежата λ = _________

Средно време на закъснение за една линия $\bar{T}=\frac{1}{\lambda}\sum\lambda_i T_i =$__________ ms .

Брой на всички пакети, които се раждат в мрежата □ = ________

Среден брой линии, през които преминава едно съобщение $\bar{n}=$______

Средно време на закъснение на пакет в мрежата $T=$__________ ms .

❖ **Работеща ли е мрежата и ако не да се дефинира проблемът и да се предложат поне три възможни решения за отстраняването му.**

Недостатъчен за трафика, които трябва да се обслужи е капацитета на линия (-и) ______________________________. Три възможни решения на проблема са:

1) ____

____

2) ____

____

3) ____

____

❖ **Да се определи средното време на закъснение *T*, ms на пакет в мрежата, след необходимата минимална промяна на скоростите на предаване на линиите, създаващи претоварване.**

Променяме скоростта на линия (-и) ______________ от ________bit/s на ________bit/s. След корекцията табл. 1.4 се променя в табл. 1.5

табл.1.5

№	линия	λ_i, бр.	C_i, bit/s	μ_i =_____,бр	T_i =___________,ms	T_i λ_i
1	AB	52				
2	AC	31				
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						

		$\lambda=\Sigma\lambda_i=$				$\Sigma\lambda_i T_i=$

Брой линии в мрежата ___________________

Брой живи пакети в мрежата λ=_________

Средно време на закъснение за една линия $\bar{T}=\frac{1}{\lambda}\sum\lambda_i T_i=$__________ ms .

Брой на всички пакети, които се раждат в мрежата γ=_________

Среден брой лини, през които преминава едно съобщение $\bar{n}=$_______

Средно време на закъснение на пакет в мрежата $T=$__________ ms .

❖ **Да се определи как влияе големината на пакетите върху средното закъснение на пакет в мрежата и да се определи пределната големина на пакет без да се допуска претоварване. Да се определи дължината на пакета, при която средното време на закъснение на пакет в мрежата спада под 20 ms. Променяйте дължината на пакета *a* през 10 bit.**

Претоварването на линия (-и)______ се преодолява при дължина на пакета ***a*** = ____bit.
Средното време на закъснение на пакет в мрежата спада под 20 ms при дължина на пакета ***a*** = _____bit. Точната му стайност е *T* = ________ ms.

***a*=**	**1000**	**bit**	***T*___**	**ms**	***T*=**	**ms**
	990					
	980					
	970					
	960					
	950					
	940					
	930					
	920					
	910					
	900					
	890					
	880					
	870					
	860					
	850					
	840					
	830					
	820					
	810					
	800					