1.4 Контекстно-зависими и тип 0-езици

Нормална форма на Курода

Една граматика $G = (V, \Sigma, P, S)$ от тип 1 е в Курода нормална форма ако

$$P \subseteq V \times (V \cup \Sigma \cup V^2) \cup V^2 \times V^2$$

Твърдение: $\forall G$ от тип $1 : \varepsilon \notin L(G) \longrightarrow$
$\exists G'$ в Курода нормална форма и $L(G) = L(G')$

Д-во: не тук.

Идея: Обобщение на нормалната форма на Чомски.

Машини на Тюринг

Дали крайните автомати са последната дума ?

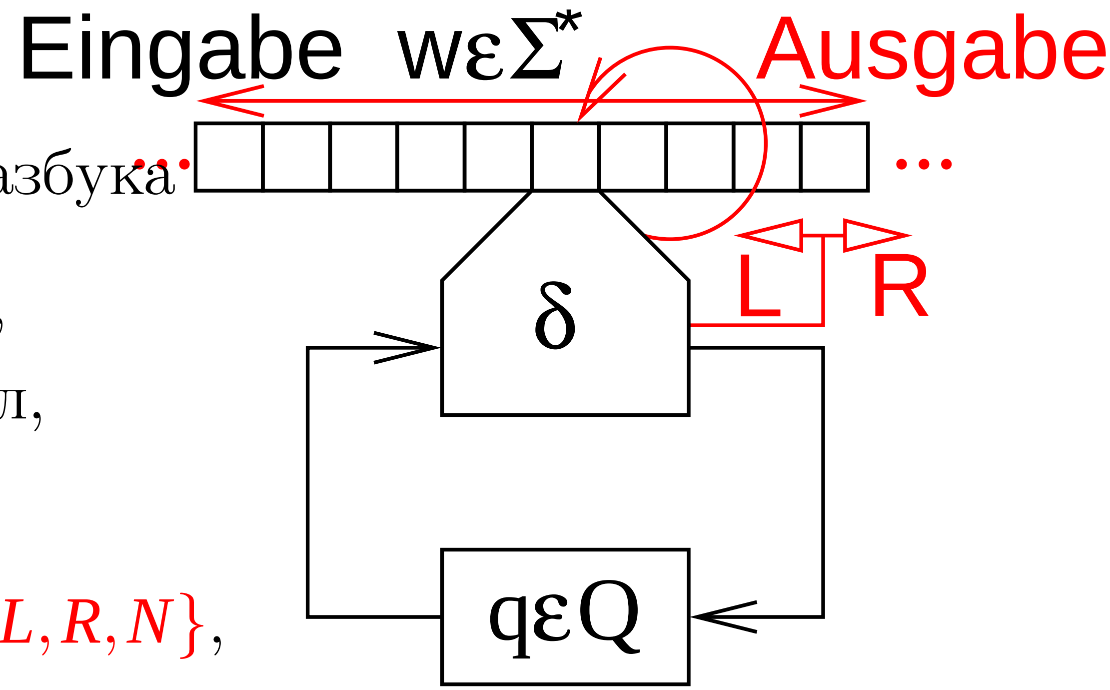
+: Един компютър с карйна памет е краен авомат!

−: Голямата памет $\rightsquigarrow$ астрономически голям брой състояния, много сложни автомати

−: Търсим един прост машинен модел за автомати, които например приемат думи от вида $a^n b^n c^n$

Детерминистични (еднолентови)-машини на Тюринг (DTM)

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:

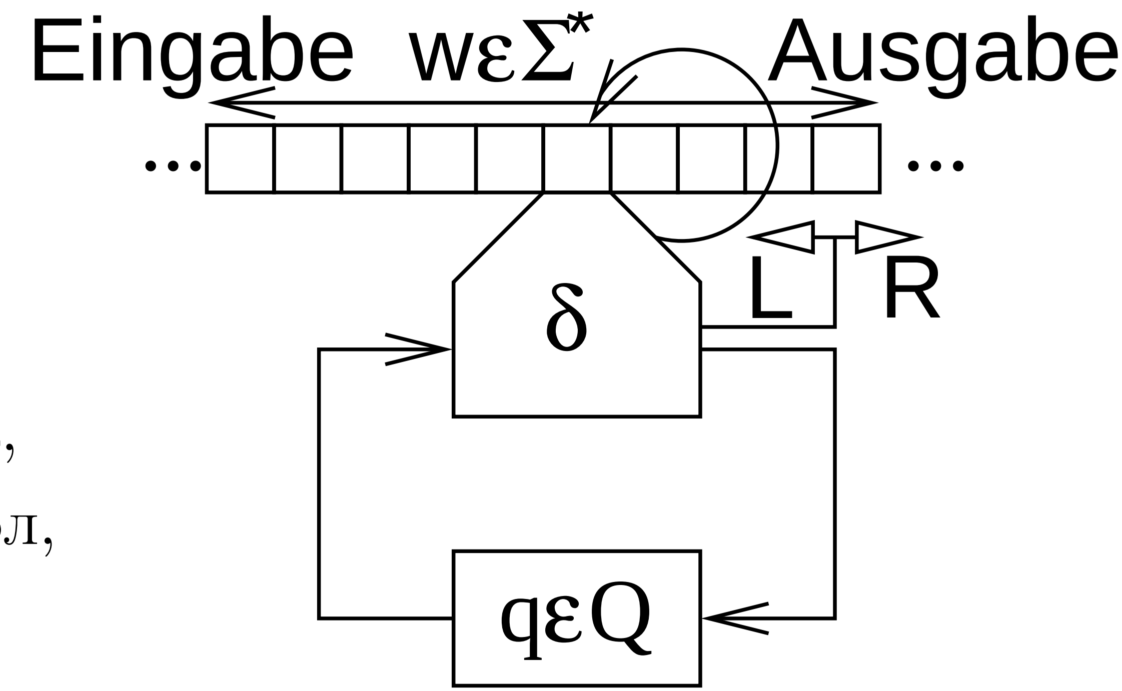


- Q състояния, Σ вх. азбука
- Γ азбука на лентата,
  $\sqcup \notin \Sigma$: празен символ,
  $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$,
  функция на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния

Недетерминистични машини на Тюринг (NTM)

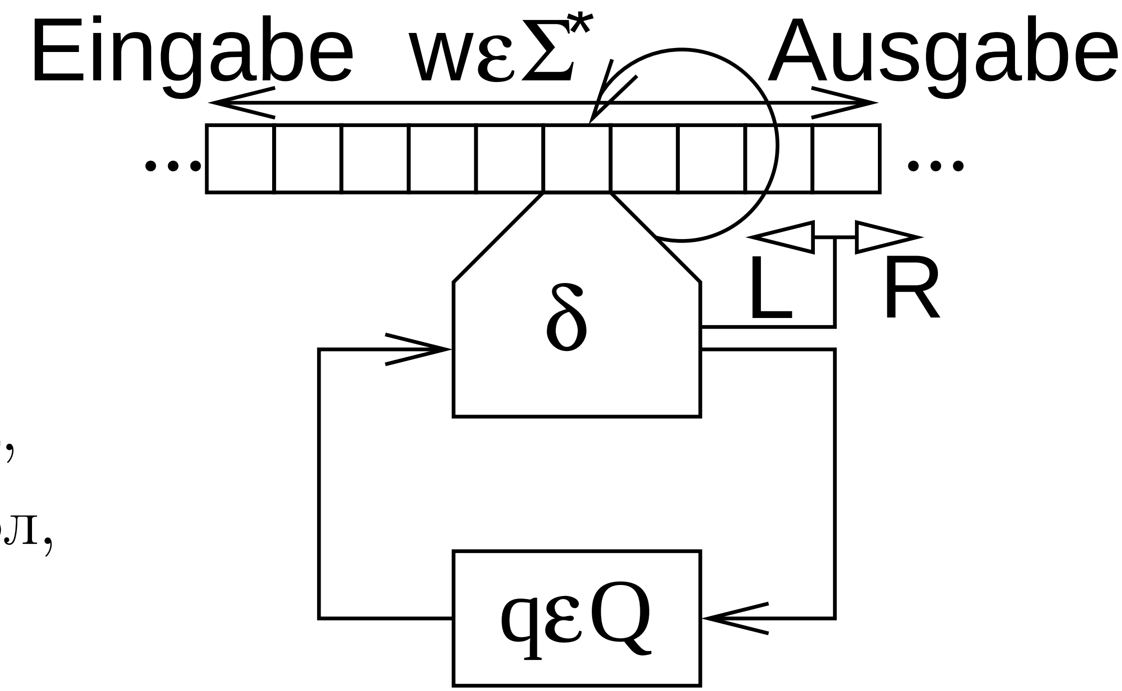
$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:

- Q, състояния
- Σ, входна азбука
- Γ азбука на лентата,
  $\sqcup \notin \Sigma$: празен символ,
  $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,R,N\}}$,
  функция на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния



Недетерминистични машини на Тюринг (NTM)

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:



- Q, състояния
- Σ, входна азбука
- Γ азбука на лентата,
  $\sqcup \notin \Sigma$: празен символ,
  $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $\delta \subseteq Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$,
  релация на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния

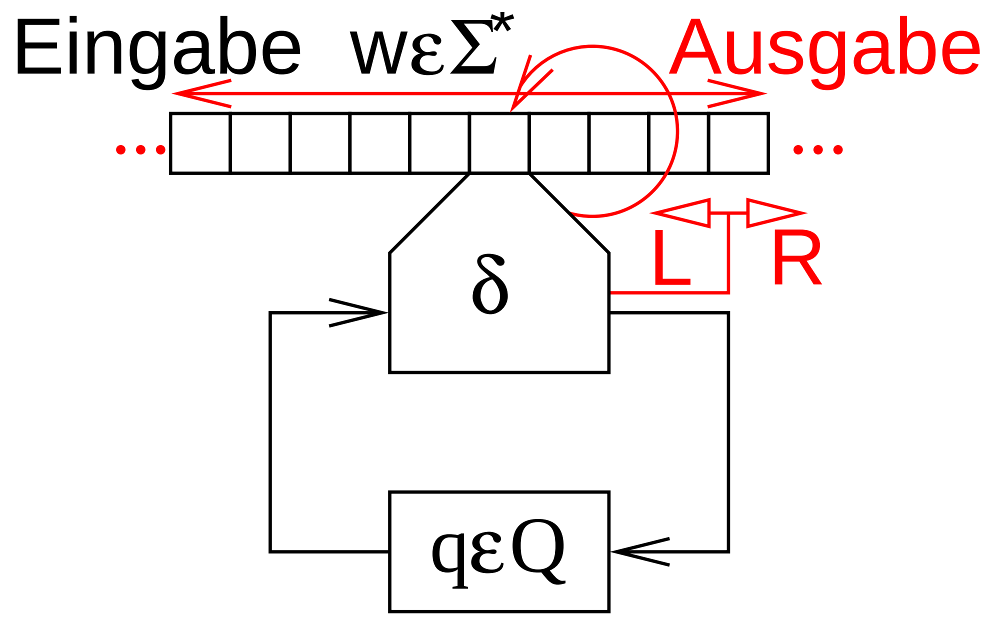
Защо машини на Тюринг?

- Исторически началото [Turing 1936]
- Оригиналната мотивация: Да се опростят изчисленията в човешката математическа дейност
- Минимално разширение на един краен автомат
- Тезис на Чърч: Всички адекватни достатъчно мощни машинни модели са еквивалентни

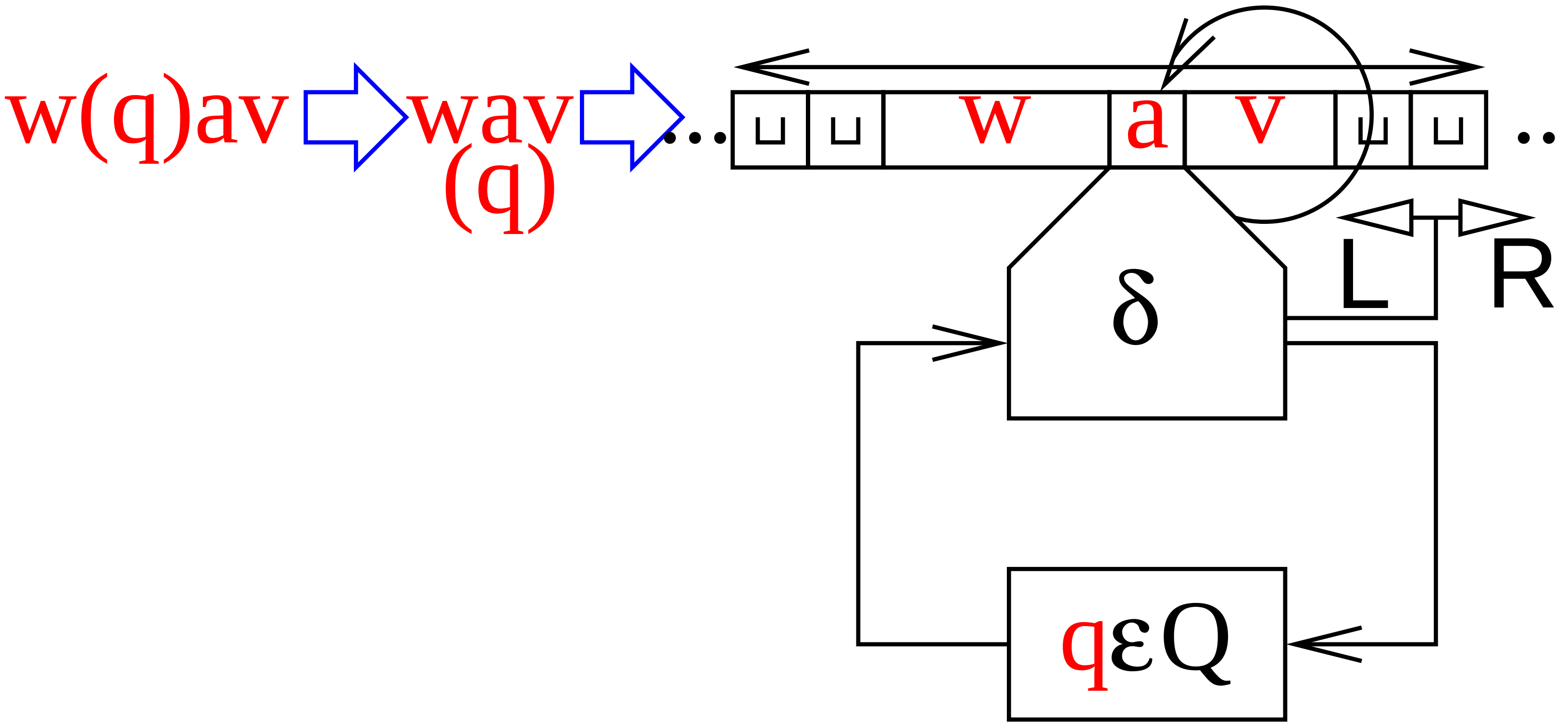
Потенциално безкрайна памет?

+: Уникална алтернатива за огромни крайни автомати

+: Шпациите преди входа и след изхода не се запомнят



Конфигурация на една ТМ



$w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$, $q \in Q$

Как работи една DTM

$$wa(q)bcv \overset{\delta(q,b)=(q',b',N)}{\vdash} wa(q')b'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{\delta(q,b)=(q',b',L)}{\vdash} w(q')ab'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{\delta(q,b)=(q',b',R)}{\vdash} wab'(q')cv$$

Функцията на прехода δ дава три нови елемента:

- Ново състояние като FA
- Нов символ — замества стария символ, сочен от главата
- Направления за придвижване на главата

Как работи една NTM

$$wa(q)bcv \overset{(q',b',N)\in\delta(q,b)}{\vdash} wa(q')b'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{(q',b',L)\in\delta(q,b)}{\vdash} w(q')ab'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{(q',b',R)\in\delta(q,b)}{\vdash} wab'(q')cv$$

Възможни преходи между конфигурациите

Кога завършва една DTM?

T завършва при конфигурация $w(q)av$, ако
$\delta(q,a) = (q,a,N)$.

Конвенция:
$\forall q \in F : \forall a \in \Gamma : \delta(q,a) = (q,a,N)$

Кога завършва една NTM?

T завършва при конфигурация $w(q)av$ ако $\delta(q,a)=\{\}$.

Конвенция:

$\forall q \in F : \forall a \in \Gamma : \delta(q,a)=\{\}$

Интерпретация с граф

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ дефинира

безкраен мулти граф

Възли: конфигурации на T.

Дъги: допустими от δ преходи между конфигурации.

$w \in L(A) \Leftrightarrow \exists$ път $P = (s)w \to \cdots \to u(f)v : f \in F$

Разлики DTM versus NTM:

δ определя преходите между конфигурации versus

δ допуска преходите между конфигурации.

Машини на Тюринг като разпознаватели

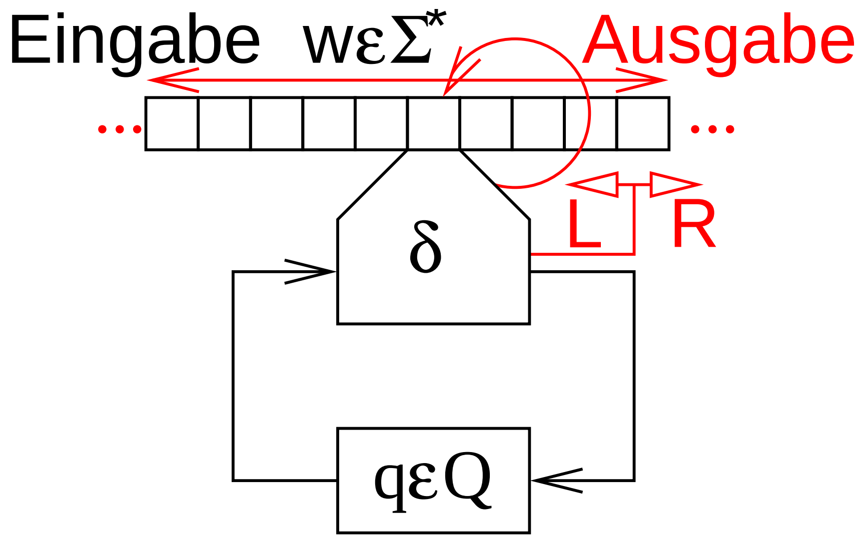
$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$.

$L(T)$?

T приема $w \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \Gamma^*, f \in F : (s)w \vdash^* \alpha f \beta$

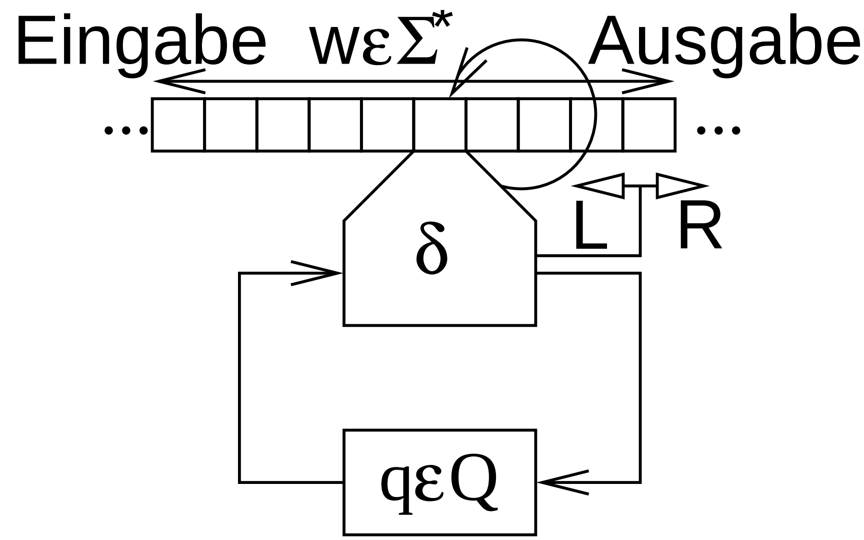
$L(T) := \{w \in \Sigma^* : T \text{ приема } w\}$.



Интерпретация с граф

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$.

$L(T)$?



Дефиниция:

T приема $w \in \Sigma^*$ ако

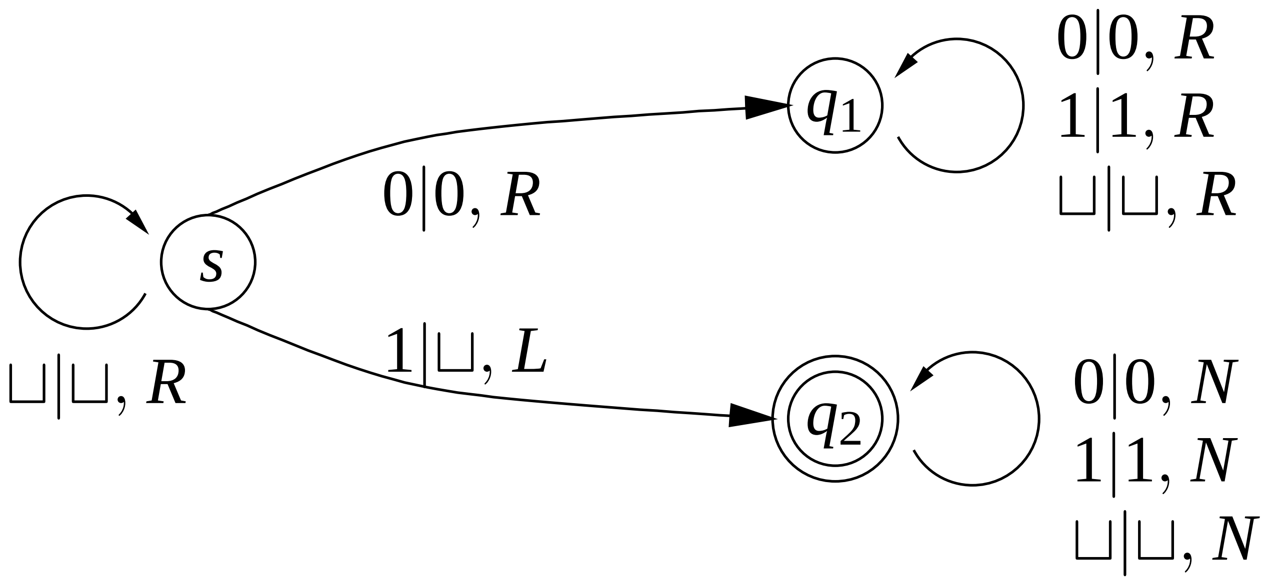
$\exists$ редица от (допустими от δ)

преходи между конфигурации

$(s)w \to \cdots \to x(f)y$ с $f \in F$.

$L(T) := \{w \in \Sigma^* : T$ приема$w\}$.

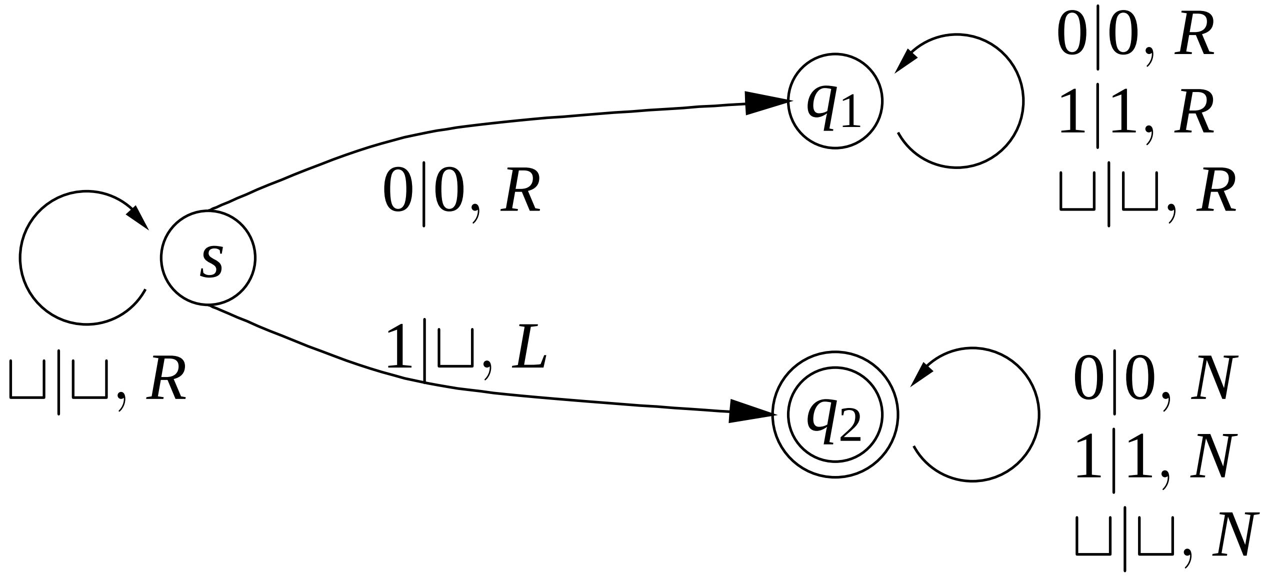
Пример: разпознавател за $L = 1(0,1)^*$



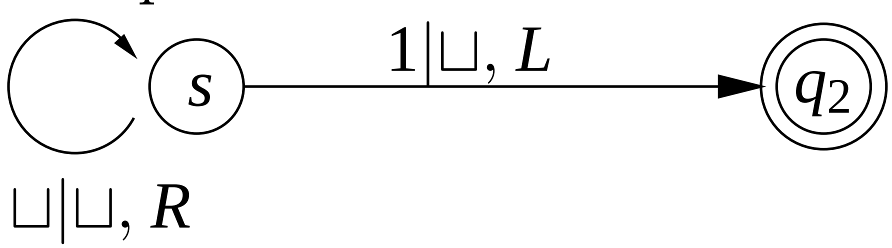
Графични означения:

Разширение на КА. Разширено маркиране на дъгите:
входни символи|изходни символи,L,N,R

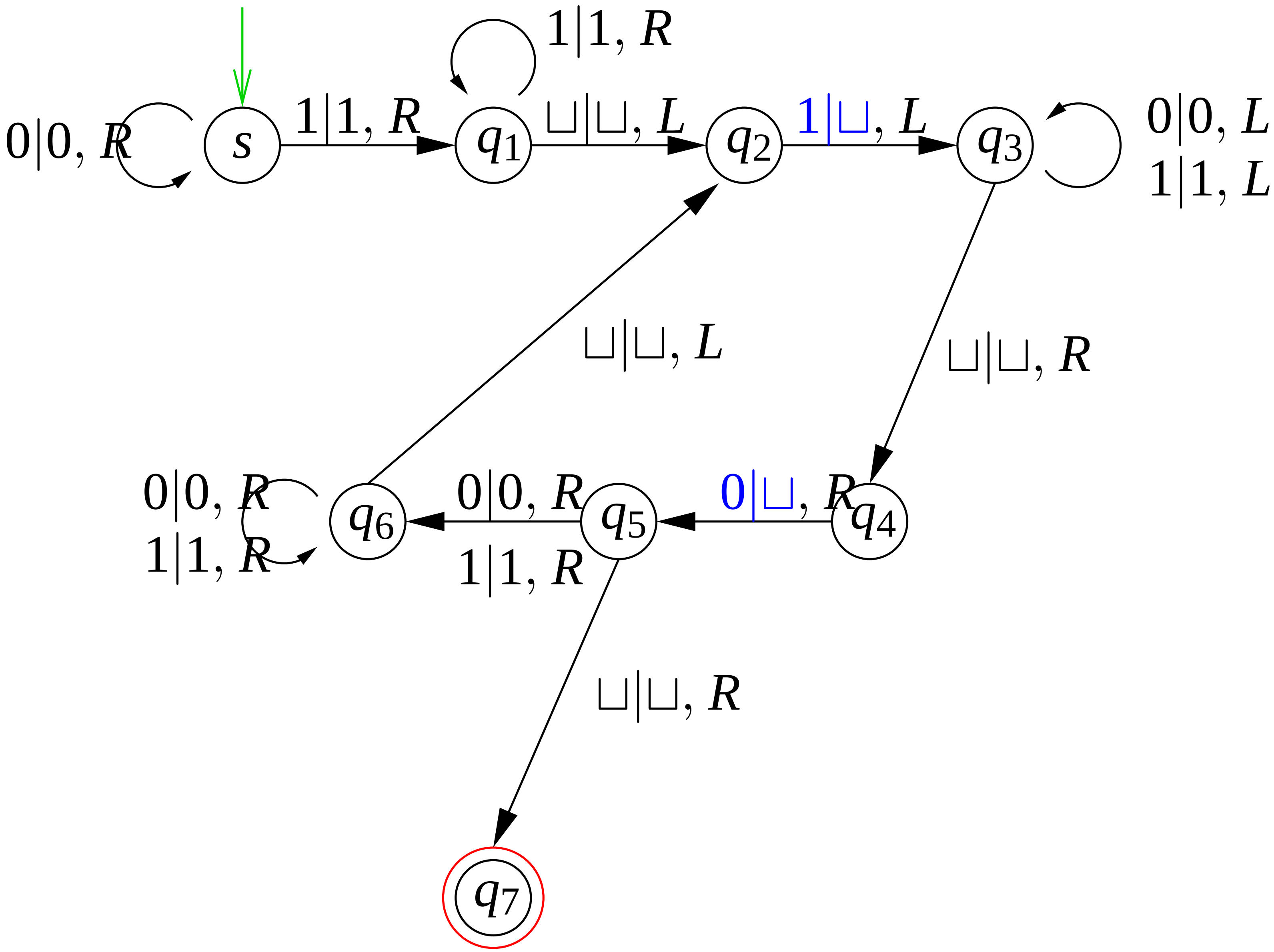
1.5



Конвенция: Завършващите с Error преходи $\rightsquigarrow$ TM завършва.



Пример: разпознаватели за $\{0^n1^n : n \geq 1\}$



$(s)000111$

$0(s)00111$

$00(s)0111$

$000(s)111$

$0001(q_1)11$

$00011(q_1)1$

$000111(q_1)$

$00011(q_2)1$

$0001(q_3)1\sqcup$

$0001(q_3)1$

$000(q_3)11$

$00(q_3)011$

$0(q_3)0011$

$(q_3)00011$

$(q_3)\sqcup 00011$

$(q_4)00011$

$\sqcup(q_5)0011$

$0(q_6)011$

$00(q_6)11$

$001(q_6)1$

$0011(q_6)$

$001(q_2)1$

$00(q_3)1\sqcup$

$0(q_3)01$

$(q_3)001$

$(q_3)\sqcup 001$

$(q_4)001$

$\sqcup(q_5)01$

$0(q_6)1$

$01(q_6)$

$0(q_2)1$

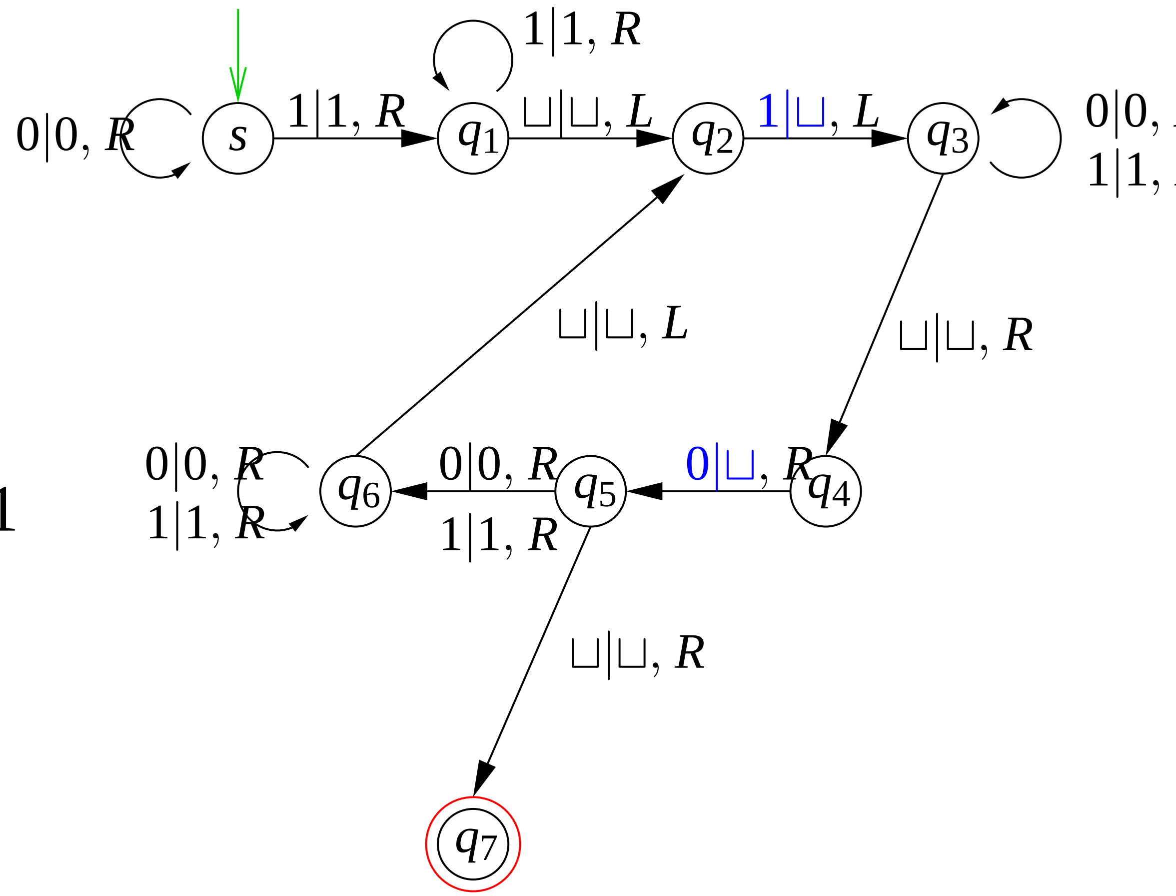
$(q_3)0\sqcup$

$(q_3)\sqcup 0$

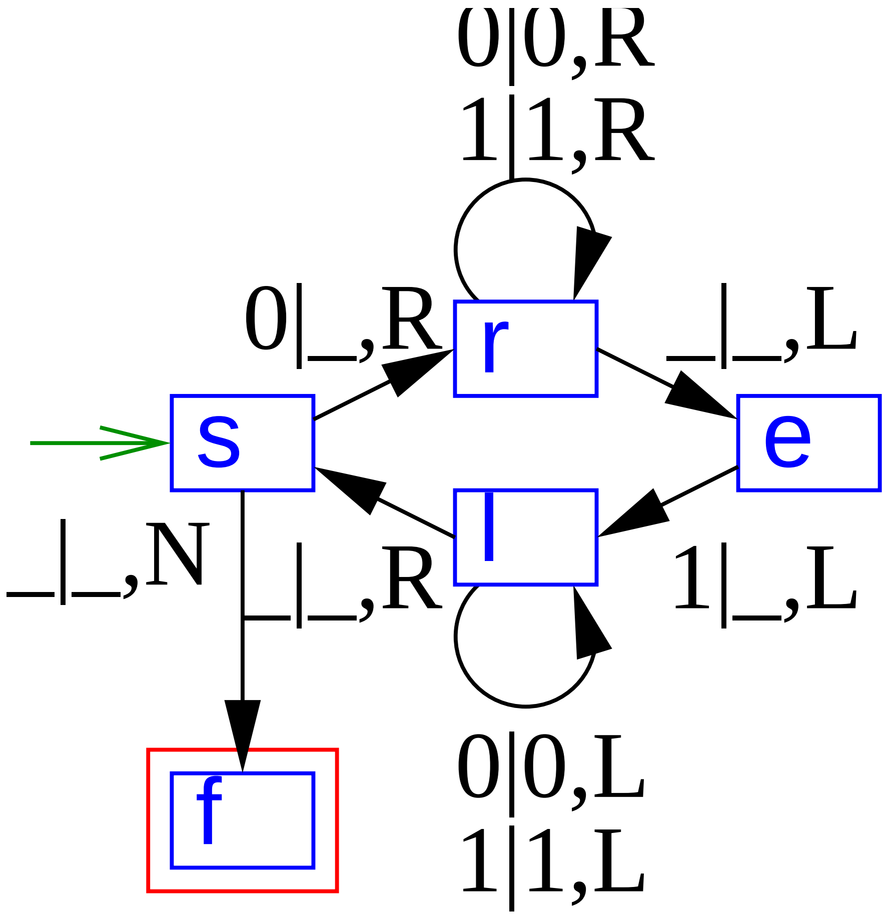
$(q_4)0$

$\sqcup(q_5)$

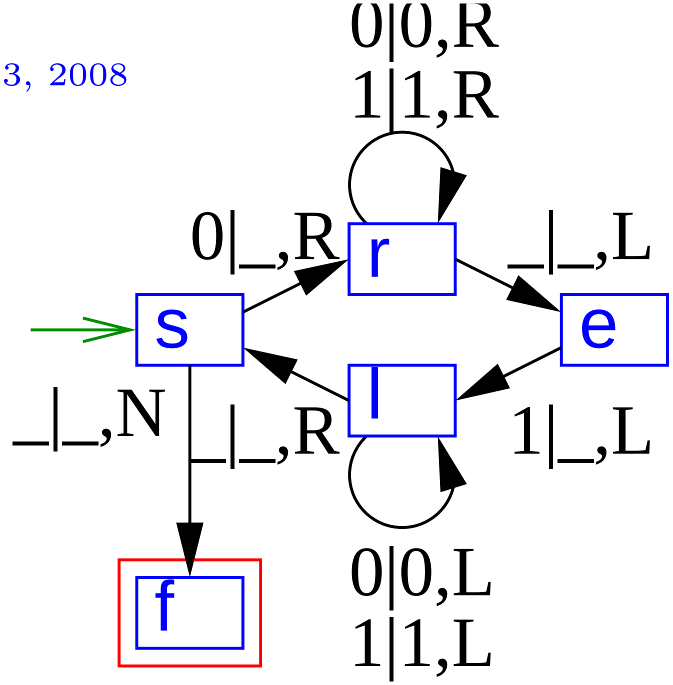
(q_7)



Пример: $\{0^n 1^n : n \geq 0\}$.



Пример: $\{0^n1^n : n \geq 0\}$.



Нека $k \geq 1$, $w \in \{0,1\}^*$

ε: $(s) \vdash (f)$.

0: $(s)0 \vdash (r) \vdash (e)$ завършва.

$1w$: $(s)1w$ завършва.

$0w0$: $(s)0w0 \vdash (r)w0 \overset{|w|+1}{\vdash} w0(r) \vdash w(e)0$ завършва.

$0w1$: $(s)0w1 \vdash (r)w1 \overset{|w|+1}{\vdash} w1(r) \vdash w(e)1 \overset{|w|+1}{\vdash} (\ell) \sqcup w \vdash (s)w$

0^n1^n: $(s)0^n1^n \vdash^* (s)0^{n-1}1^{n-1} \vdash^* \cdots \vdash^* (s) \vdash (f)$

$0u1$, $u \notin \{0^n1^n : n \geq 0\}$: $(s)0u1 \vdash^* (s)u$. Не завършва в f.

(Индукция)

Варианти на машини на Тюринг

k глави: $\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$

k ленти: т.е. една глава за лента

d-размерна лента: например $d = 2$,

$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, U, D, N\}$

вероятностни: допълнително инструкции за движение на главата с рандом бит

LBA:

Линейно ограничени недетрминистични машини на Тюринг

NTM $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ е линейно ограничена, когато

$$\forall a = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+ : (s)a \vdash^* \alpha(q)\beta \longrightarrow |\alpha\beta| \leq n$$

Твърдение: $\forall$тип 1 език $L : \exists$LBA $T : L(T) = L$

Д-во: Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$-тип 1 граматика с $L(G) = L$.

Да разгледаме NTM $T = (Q, \Sigma, (\Sigma \cup V), \delta, s, F)$:

Procedure inL(z) // начална конфигурация $(s)z$

  invariant "съдържанието на лентата"$\overset{*}{\Rightarrow} z$

  invariant $|\text{tape}| \leq |z|$

  while tape$\neq S$ do

    if $\exists w \to \alpha \in P : \text{tape} = x\alpha y$ then // 2× недетрм. избор!

      tape:= xwy // заместващо правило!

    else reject z

  accept z

приемащо изчисление$\xrightarrow{Inv.}$ $\exists$ извод.

$S \overset{*}{\Rightarrow} z \longrightarrow \exists$ съответстващо успешно изчисление .

Подпрограма: търсене на подходяща лява страна

- Нека G е в Курода-нормална форма $\longrightarrow$ |десните символи| ≤ 2
- отиди до левия ограничител
- отиди до десния през лентата:
  - състоянието запазва символа L в ляво от главата
  - δ може да зависи от L, актуалния символ на лентата и информацията от P (крайно !) определяйки дали са подходящи за правилото
  - Да? $\longrightarrow$ Направи субституцията
  - Не? Продължи

Подпрограма: заместване за $AB \longrightarrow CD$

- Една стъпка наляво
- Напиши C
- Една стъпка надясно
- Напиши D
- Обратно към главния цикъл

Подпрограма: заместване за $AB \longrightarrow C$

Напиши C; една стъпка наляво

напиши $\sqcup$

иди в ляво в началото на лентата

запомни първия символ на лентата в състояние

repeat

    размени запазения и актуалния символ на лентата;

    една стъпка в дясно

until $\sqcup$ се замести

Твърдение: $\forall L : \exists \text{LBA } T : L(T) = L \rightarrow L$ е език от тип 1.

Д-во: Нека $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ е LBA и $L(T) = L$.

Да разгледаме граматика от тип 1

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

Идея: ТМ-конфигурация $\alpha(q)a\beta \rightsquigarrow$ твърдение за $\alpha(q,a)\beta$ плюс екстра информация за оригиналния вход.

3 фази на извода:

1. генерираме дума от Σ^*.

2. симулираме изчислението на ТМ.

3. след успешно приемане възстановяваме входната дума

Фаза 1: генериране на дума от Σ^*

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ LBA и $L(T) = L$.

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

$\{S \to S(a,a) : a \in \Sigma\} \subseteq P$

$\{S \to (s,a,a) : a \in \Sigma\} \subseteq P$ край на фаза 1.

(и специални грижи ако $\varepsilon \in L$)

Пример: $S \Rightarrow S(c,c) \Rightarrow S(b,b)(c,c) \Rightarrow (s,a,a)(b,b)(c,c)$

отговаря на началната конфигурация $(s)abc$

Фаза 2: симулиране на изчислението на TM

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ LBA с $L(T) = L$.

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

$$P := P \cup \{(q,a,c) \to (q',a',c) \quad : (q',a',N) \in \delta(q,a), c \in \Sigma\}$$

$$\cup \{(b,c')(q,a,c) \to (q',b,c')(a',c) \quad : (q',a',L) \in \delta(q,a), c \in \Sigma\}$$

$$\cup \{(q,a,c)b \to a'(q',b,c) \quad : (q',a',R) \in \delta(q,a), c \in \Sigma\}$$

Пример: $(s,a,a)(b,b)(c,c) \overset{*}{\Rightarrow} (x,a)(f,y,b)(z,c)$
отговаря на редицата от конфигурации
$(s)abc \vdash \cdots \vdash x(f)yz$

Фаза 3: възстановява входната дума

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ LBA с $L(T) = L$.

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

$\{(f, a, c) \to c : f \in F, a \in \Gamma, c \in \Sigma\} \subseteq P$ Приемане

$\{(a, b) \to b : a \in \Gamma \wedge b \in \Sigma\} \subseteq P$

Пример: $(x, a)(f, y, b)(z, c) \Rightarrow (x, a)b(z, c) \Rightarrow ab(z, c) \Rightarrow abc$

Свойства за затвореност за тип 1

Затвореност относно

- обединение $\bigcup$
- конкатенация $\cdot$
- звезда $*$
- сечение $\bigcap$
- допълнение $\overline{\cdot}$

Затвореност относно обединение за тип 0/1

$L(A_1) \cup L(A_2)$ hat тип 0/1 ?

Две подпрограми U_1 за $L(A_1)$ и U_2 за $L(A_2)$.

Нова програма за $U_1 \vee U_2$.

Не е необходимо допълнително място.

Упражнение: Затвореност относно сечение за тип 0/1

Затвореност относно конкатенация за тип 0/1

$L(A_1) \cdot L(A_2)$ имат тип 0/1 ?

Две подпрограми U_1 за $L(A_1)$ и U_2 за $L(A_2)$.

Нова програма за $w \in L(A_1) \cdot L(A_2)$?:

Разделяме $w = w_1 w_2$ (недетрминистично).

return $w_1 \in L(A_1) \wedge w_2 \in L(A_2)$

Работи без разширяване на лентата но с маркиране.

Упражнение: Затвореност относно звезда на Клини $(*)$ за тип 0/1

Затвореност относно допълнение за тип 1

Дадено: $L = L(G) \subseteq \Sigma^*$, $G = (V, \Sigma, P, S)$.

Идея: намираме LBA M, който приема $x \in \Sigma^n$, $x \notin L$.

$a := \left|\left\{\alpha \in (V \cup \Sigma)^* : |\alpha| \leq n \wedge S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha\right\}\right|$ // todo

$c := 0$

foreach $\alpha \in (V \cup \Sigma)^* \setminus \{x\}$ с $|\alpha| \leq n$ do

  if $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ then $c{+}{+}$

  else continue // недетрминистичен fail !

return $c = a$

Изчисляване на $\left|\left\{\alpha \in (V\cup\Sigma)^* : |\alpha| \le n \wedge S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha\right\}\right|$

$a := 1$ // $|\{S\}|$

for $m := 1$ to ∞ do // край на извода

  $b := 0$ // брояч за нови или стари думи

  foreach $w' \in (V\cup\Sigma)^*$ в $|\alpha| \le n$ do

    z:= 0 // брояч за стари думи

    foreach $w \in (V\cup\Sigma)^*$ с $|\alpha| \le n$ do

      if $S \overset{\le m}{\Rightarrow} w$ then $z{+}{+}$ // недетрминистично

      if $w = w' \vee w \Rightarrow w'$ then $b{+}{+}$

    if $z \ne a$ then fail

  if $a = b$ then break loop

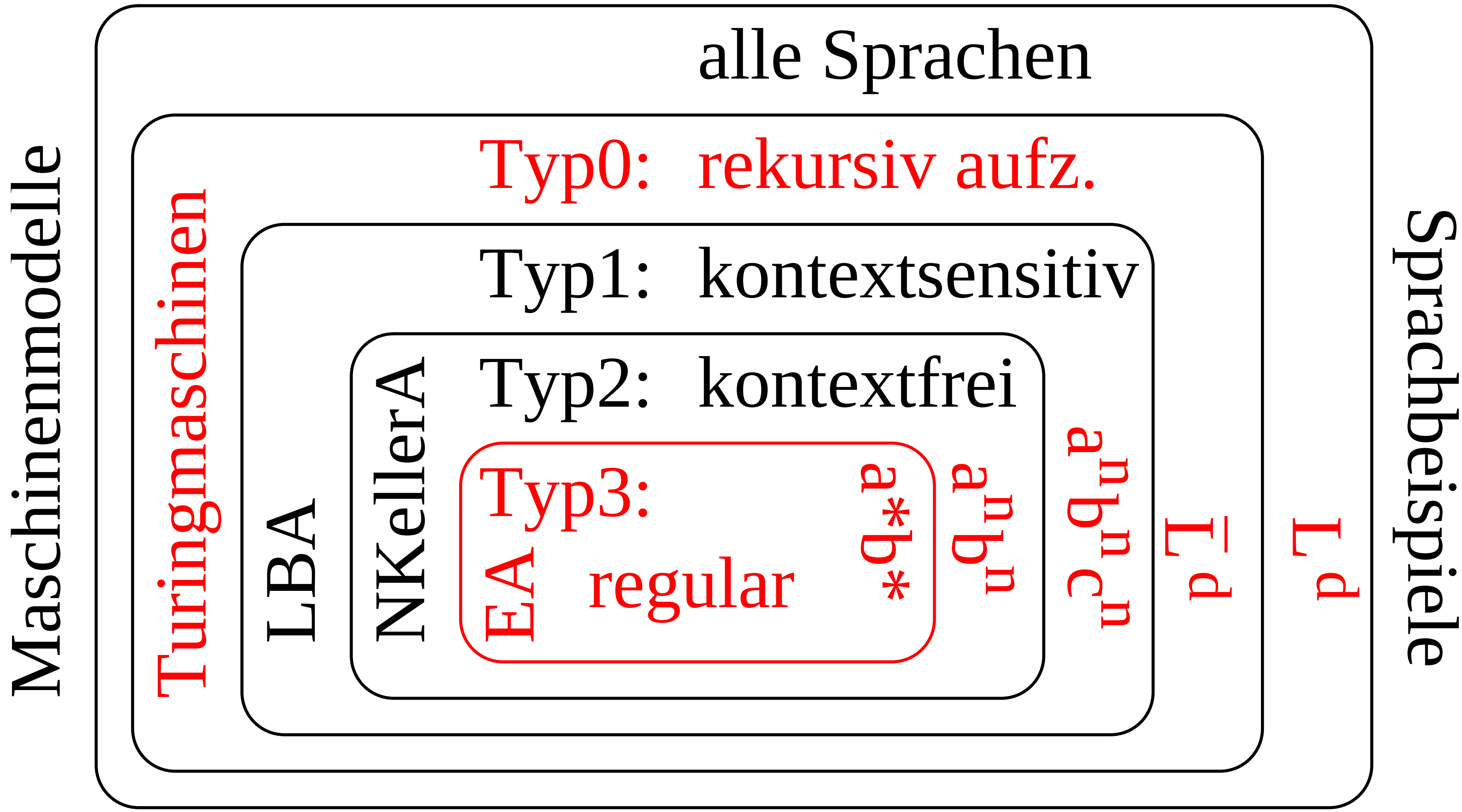
  $a := b$

тип 0 езици

Твърдение: L се разпознава от ТМ $\Leftrightarrow L$ има тип 0

Д-во: Аналогично на д-вото за тип 1.

Йерархия на Чомски



тип	описание
3	дясно линейни или ляво линейни DFA, $\bar{\varepsilon}$NFA, εNFA регулярни изрази
Det. CF	LR(k) граматика DKellerA с кр. съст.
2	контекстно-свободна гр. (1-съст.)NKellerA
1	контекстно-зависима LBA
0	тип 0 grammar Машина на Тюринг

тип	Недетрм.	Детерминистични	еквивалентни?
3	NFA	DFA	да
2	NKellerA	DKellerA	не
1	LBA	DLBA	???
0	NTM	DTM	да (спец. комп.)

Свойства на затвореност

тип	$\cap$	$\cup$	$\bar{\cdot}$	$\cdot$	$*$
3	да	да	да	да	да
Дет. КСв	не	не	да	не	не
2	не	да	не	да	да
1	да	да	да	да	да
0	да	да	не	да	да

Рарешимост

тип	Дума-	празнота-	еквивалентност	празно сечен
3	да	да	да	да
Дет. КСв	да	да	да [97]	не
2	да	да	не	не
1	да	не	не	не
0	не	не	не	не

Сложност на проблема за принадлежност на дума

тип	сложност
3	$\mathcal{O}(n)$
Дет. КСв	$\mathcal{O}(n)$
2	$\mathcal{O}\left(n^3\right)$
1	$\lvert\Sigma\rvert^{\mathcal{O}(n)}$, "NP-трудна" $\rightsquigarrow$ теория на сложността
0	"рекурсивно номер." $\rightsquigarrow$ изчислими

Йерархия на Чомски-критицизъм

2: (Само?) тези граматики са “точно правилни”

3: “случйно” правят линейни изводи като един краен автомат

0,1: правилата за контекстно-зависими граматики са от твърде ниско ниво и са твърде подобни на TM за да се правят интересни моделни приложения

1: Едно от многото решения на специалния случай?
Защо точно линейно ограничение на паметта?
Има полезни обобщения на CFGs.