# 1.4 Контекстно-зависими и тип 0-езици

# Нормална форма на Курода

Една граматика $G = (V, \Sigma, P, S)$ от тип 1 е в Курода нормална форма ако

$$P \subseteq V \times (V \cup \Sigma \cup V^2) \cup V^2 \times V^2$$

Твърдение: $\forall G$ от тип $1 : \varepsilon \notin L(G) \longrightarrow$
$\exists G'$ в Курода нормална форма и $L(G) = L(G')$

Д-во: не тук.

Идея: Обобщение на нормалната форма на Чомски.

# Машини на Тюринг

Дали крайните автомати са последната дума ?

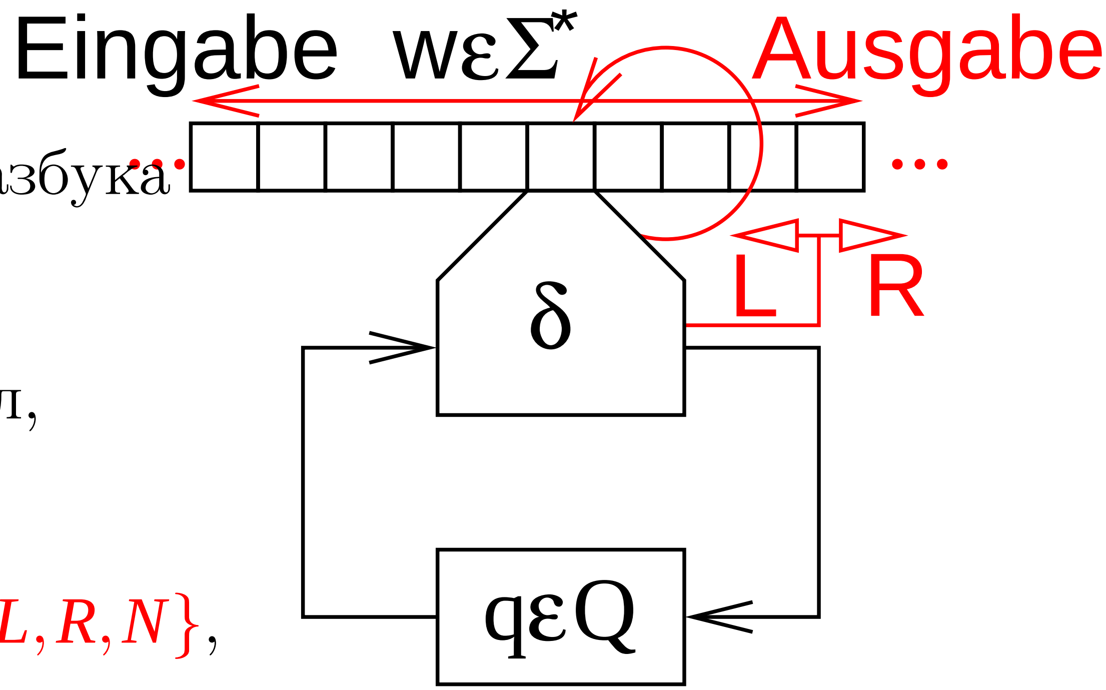
+: Един компютър с карйна памет е краен авомат!

−: Голямата памет $\rightsquigarrow$ астрономически голям брой състояния, много сложни автомати

−: Търсим един **прост** машинен модел за автомати, които например приемат думи от вида $a^n b^n c^n$

# Детерминистични (еднолентови)-машини на Тюринг (DTM)

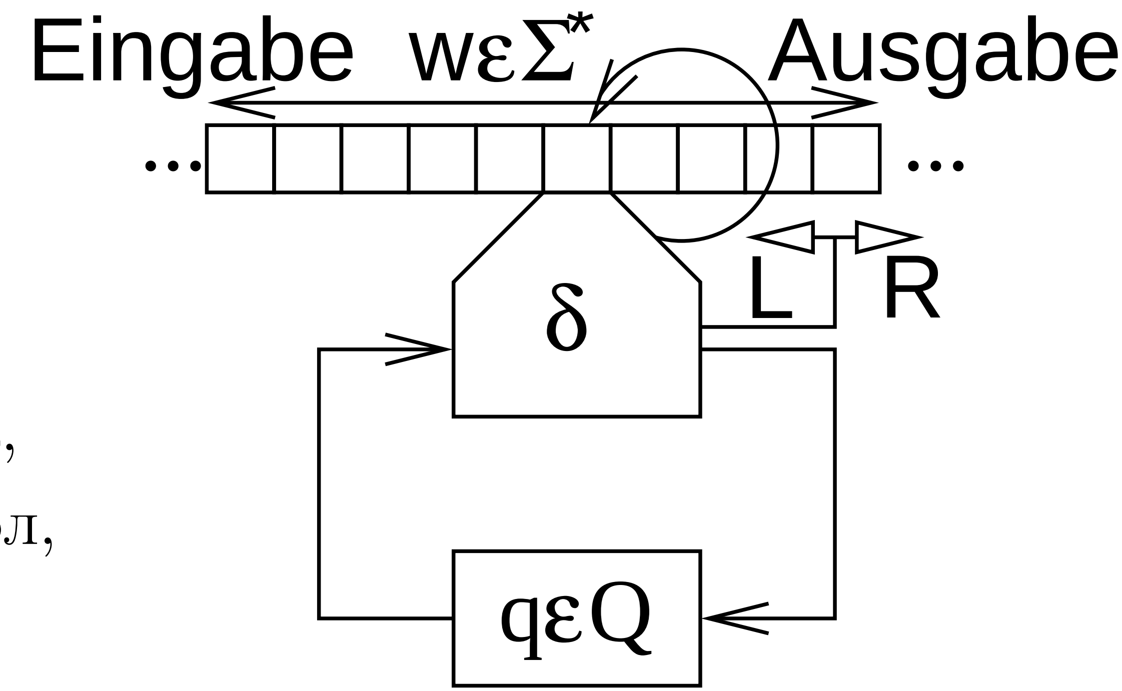
$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:




- $Q$ състояния, $\Sigma$ вх. азбука
- $\Gamma$ азбука на лентата,
  $\sqcup \notin \Sigma$: празен символ,
  $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$,
  функция на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния

# Недетерминистични машини на Тюринг (NTM)

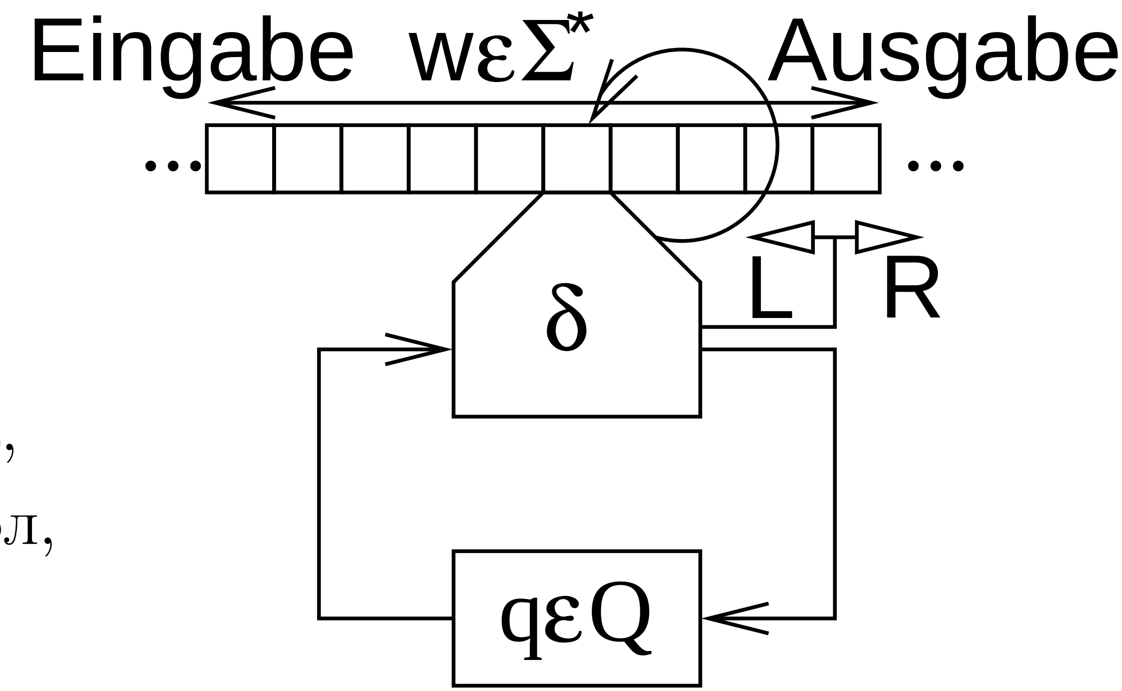
$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:




- $Q$, състояния
- $\Sigma$, входна азбука
- $\Gamma$ азбука на лентата,
  $\sqcup \notin \Sigma$: празен символ,
  $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,R,N\}}$,
  функция на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния

# Недетерминистични машини на Тюринг (NTM)

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:




- $Q$, състояния
- $\Sigma$, входна азбука
- $\Gamma$ азбука на лентата,
  $\sqcup \notin \Sigma$: празен символ,
  $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $\delta \subseteq Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$,
  релация на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния

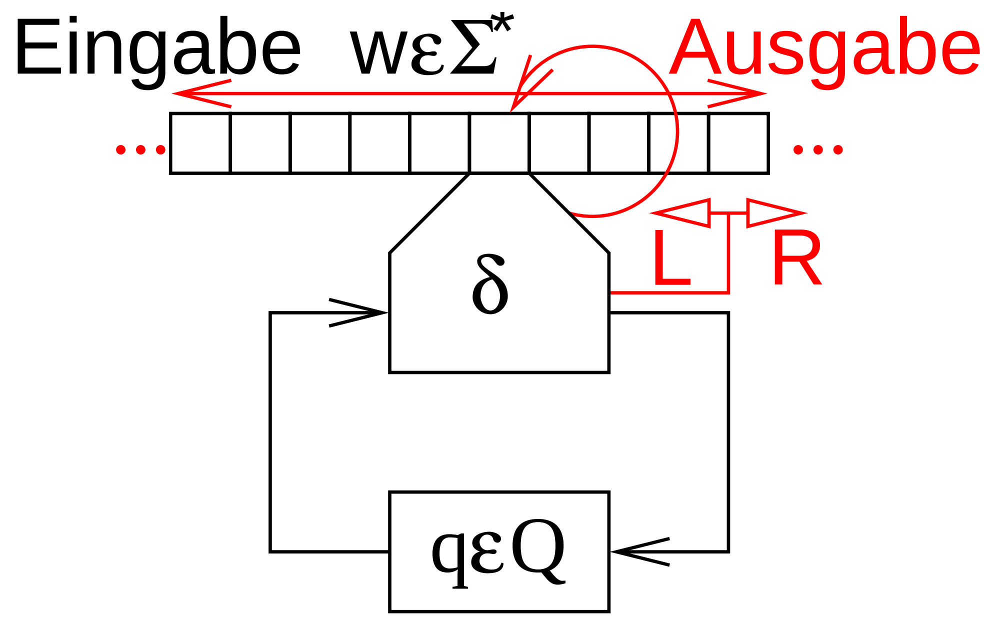
# Защо машини на Тюринг?

- Исторически началото [Turing 1936]
- Оригиналната мотивация: Да се опростят изчисленията в човешката математическа дейност
- Минимално разширение на един краен автомат
- Тезис на Чърч: Всички адекватни достатъчно мощни машинни модели са еквивалентни

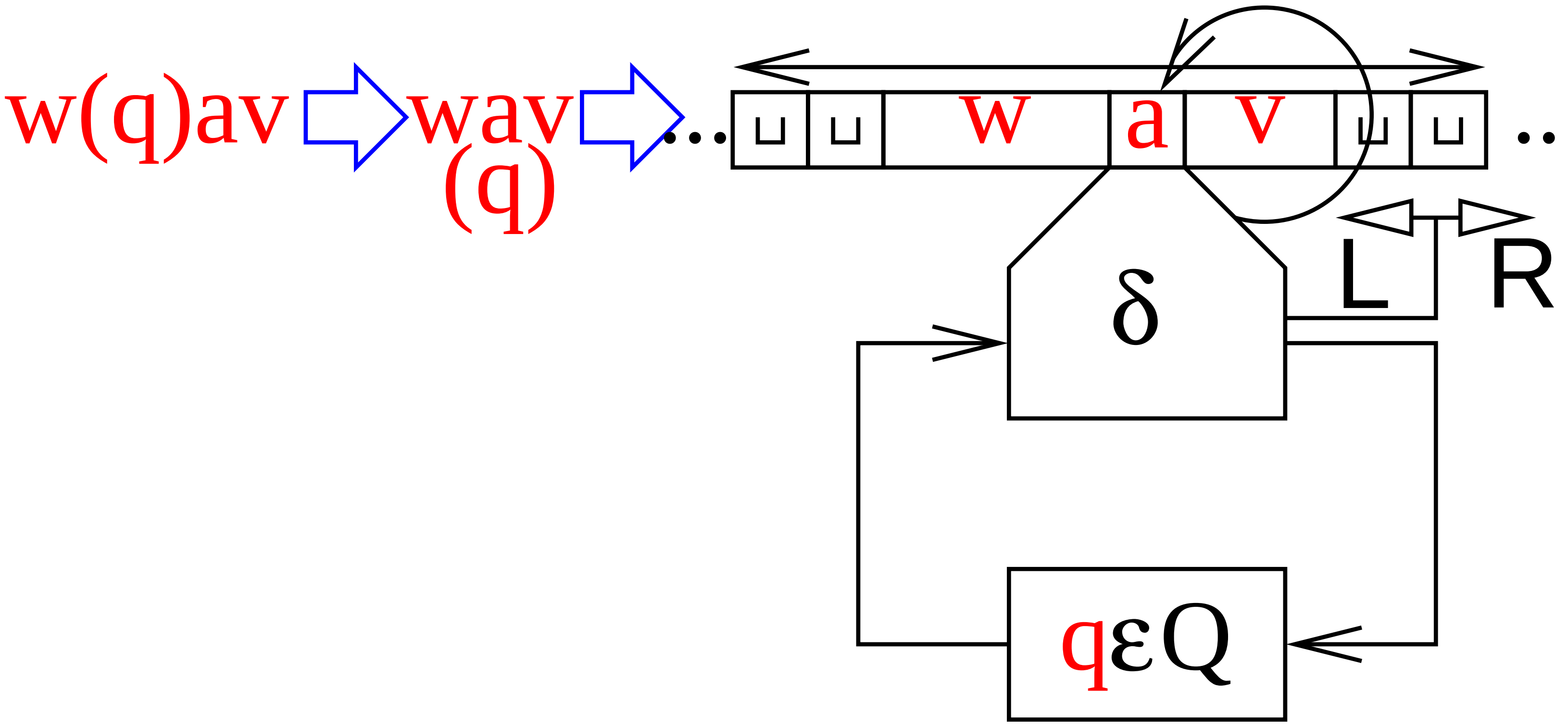
# Потенциално безкрайна памет?

+: Уникална алтернатива за огромни крайни автомати

+: Шпациите преди входа и след изхода не се запомнят



# Конфигурация на една ТМ




$w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$, $q \in Q$

# Как работи една DTM

$$wa(q)bcv \overset{\delta(q,b)=(q',b',N)}{\vdash} wa(q')b'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{\delta(q,b)=(q',b',L)}{\vdash} w(q')ab'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{\delta(q,b)=(q',b',R)}{\vdash} wab'(q')cv$$

Функцията на прехода $\delta$ дава три нови елемента:

- Ново състояние — като FA
- Нов символ — замества стария символ, сочен от главата
- Направления за придвижване на главата

# Как работи една NTM

$$wa(q)bcv \overset{(q',b',N)\in\delta(q,b)}{\vdash} wa(q')b'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{(q',b',L)\in\delta(q,b)}{\vdash} w(q')ab'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{(q',b',R)\in\delta(q,b)}{\vdash} wab'(q')cv$$

Възможни преходи между конфигурациите

# Кога завършва една DTM?

$T$ завършва при конфигурация $w(q)av$, ако
$\delta(q,a) = (q,a,N)$.

Конвенция:
$\forall q \in F : \forall a \in \Gamma : \delta(q,a) = (q,a,N)$

# Кога завършва една NTM?

$T$ завършва при конфигурация $w(q)av$ ако $\delta(q,a) = \{\}$.

Конвенция:

$\forall q \in F : \forall a \in \Gamma : \delta(q,a) = \{\}$

# Интерпретация с граф

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ дефинира

безкраен мулти граф

Възли: конфигурации на $T$.

Дъги: допустими от $\delta$ преходи между конфигурации.

$w \in L(A) \Leftrightarrow \exists$ път $P = (s)w \to \cdots \to u(f)v : f \in F$

Разлики DTM versus NTM:

$\delta$ определя преходите между конфигурации versus

$\delta$ допуска преходите между конфигурации.

# Машини на Тюринг като разпознаватели

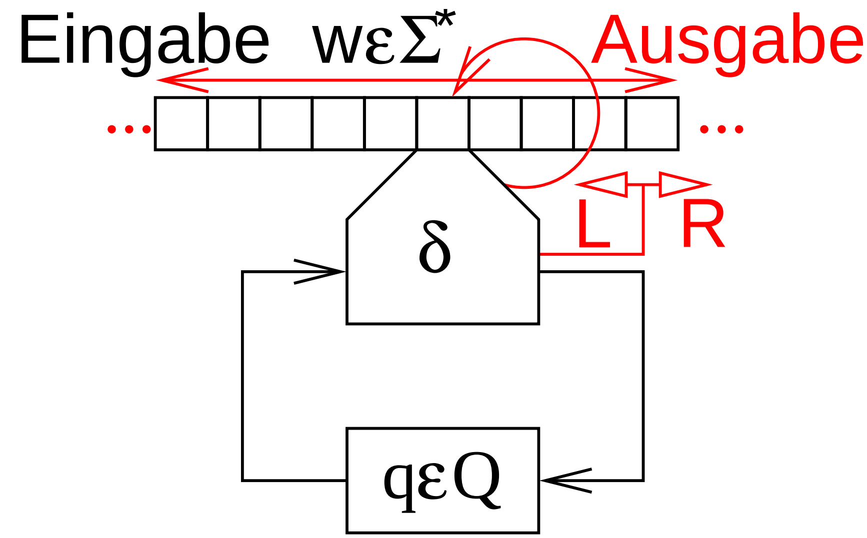
$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$.

$L(T)$?

$T$ приема $w \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \Gamma^*, f \in F : (s)w \vdash^* \alpha f \beta$

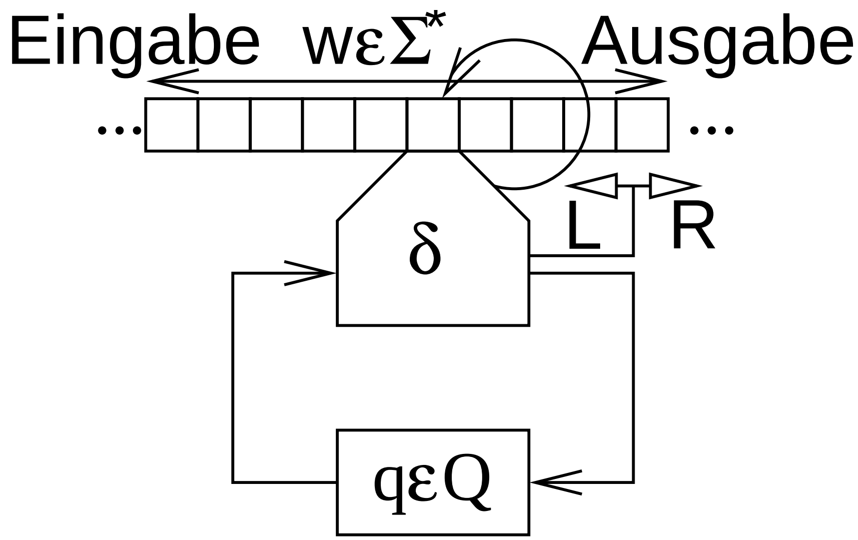
$L(T) := \{w \in \Sigma^* : T \text{ приема } w\}$.



# Интерпретация с граф

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$.

$L(T)$?




Дефиниция:

$T$ приема $w \in \Sigma^*$ ако

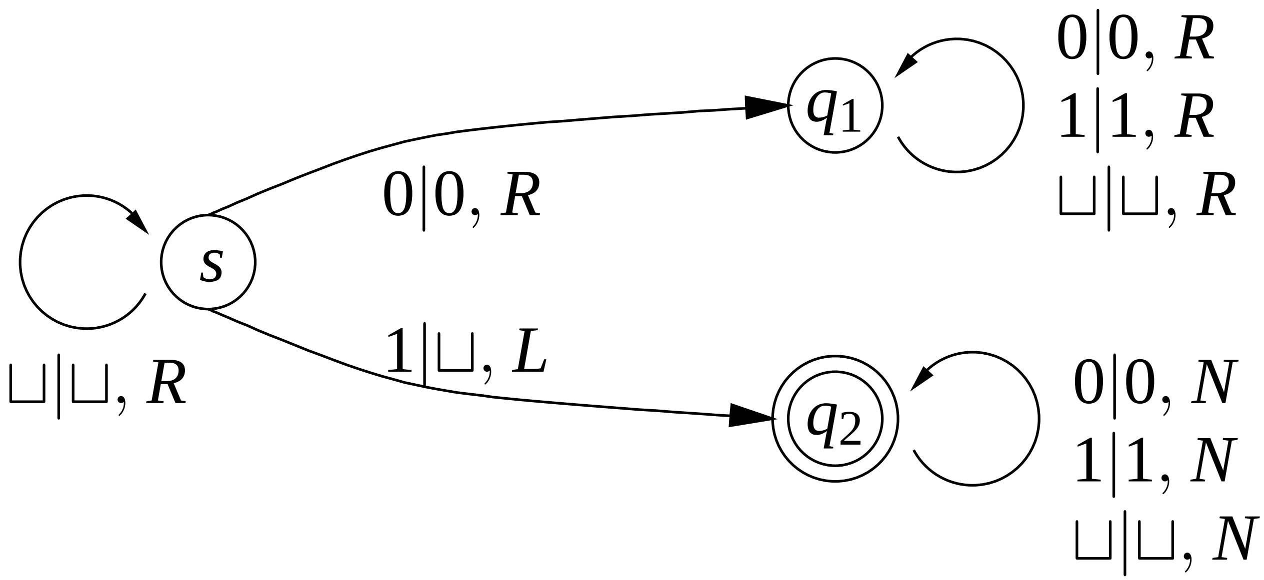
$\exists$ редица от ( допустими от $\delta$)

преходи между конфигурации

$(s)w \to \cdots \to x(f)y$ с $f \in F$.

$L(T) := \{w \in \Sigma^* : T$ приема$w\}$.

# Пример: разпознавател за $L = 1(0,1)^*$

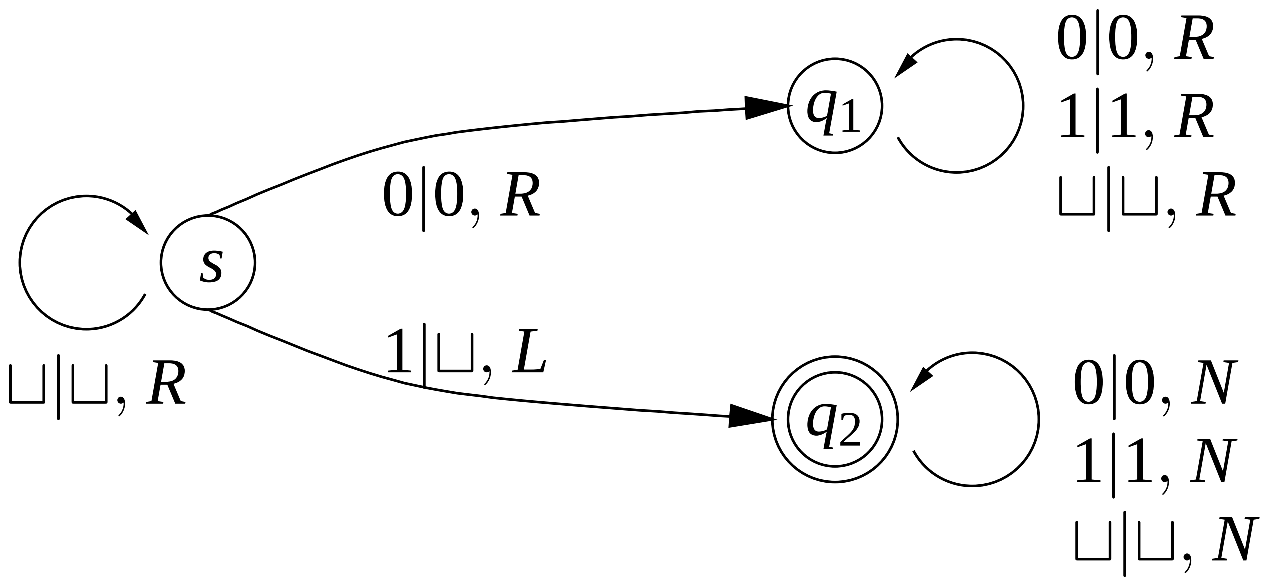



Графични означения:

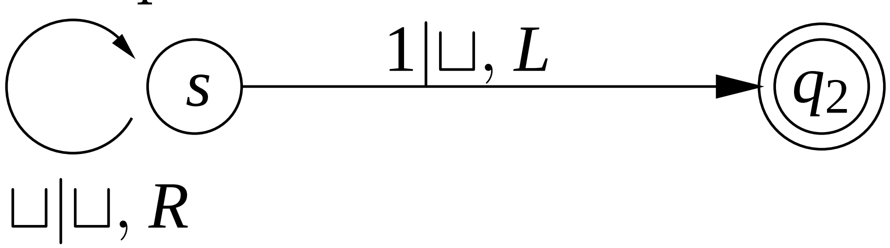
Разширение на КА. Разширено маркиране на дъгите:

входни символи|изходни символи,L,N,R

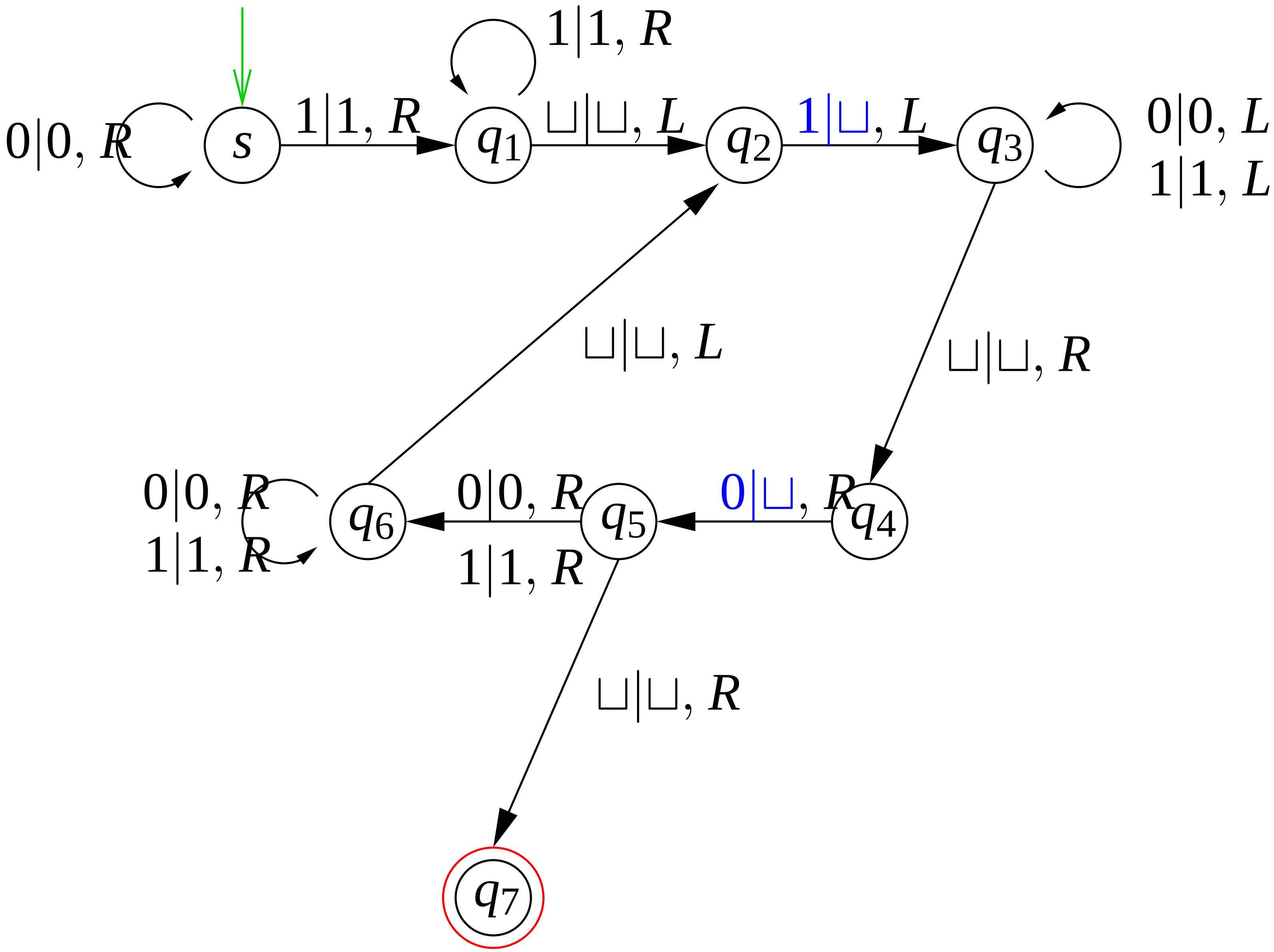
# 1.5




Конвенция: Завършващите с Error преходи $\rightsquigarrow$ ТМ завършва.



# Пример: разпознаватели за $\{0^n1^n : n \geq 1\}$



$(s)000111$

$0(s)00111$

$00(s)0111$

$000(s)111$

$0001(q_1)11$

$00011(q_1)1$

$000111(q_1)$

$00011(q_2)1$

$0001(q_3)1\sqcup$

$0001(q_3)1$

$000(q_3)11$

$00(q_3)011$

$0(q_3)0011$

$(q_3)00011$

$(q_3)\sqcup 00011$

$(q_4)00011$

$\sqcup(q_5)0011$

$0(q_6)011$

$00(q_6)11$

$001(q_6)1$

$0011(q_6)$

$001(q_2)1$

$00(q_3)1\sqcup$

$0(q_3)01$

$(q_3)001$

$(q_3)\sqcup 001$

$(q_4)001$

$\sqcup(q_5)01$

$0(q_6)1$

$01(q_6)$

$0(q_2)1$

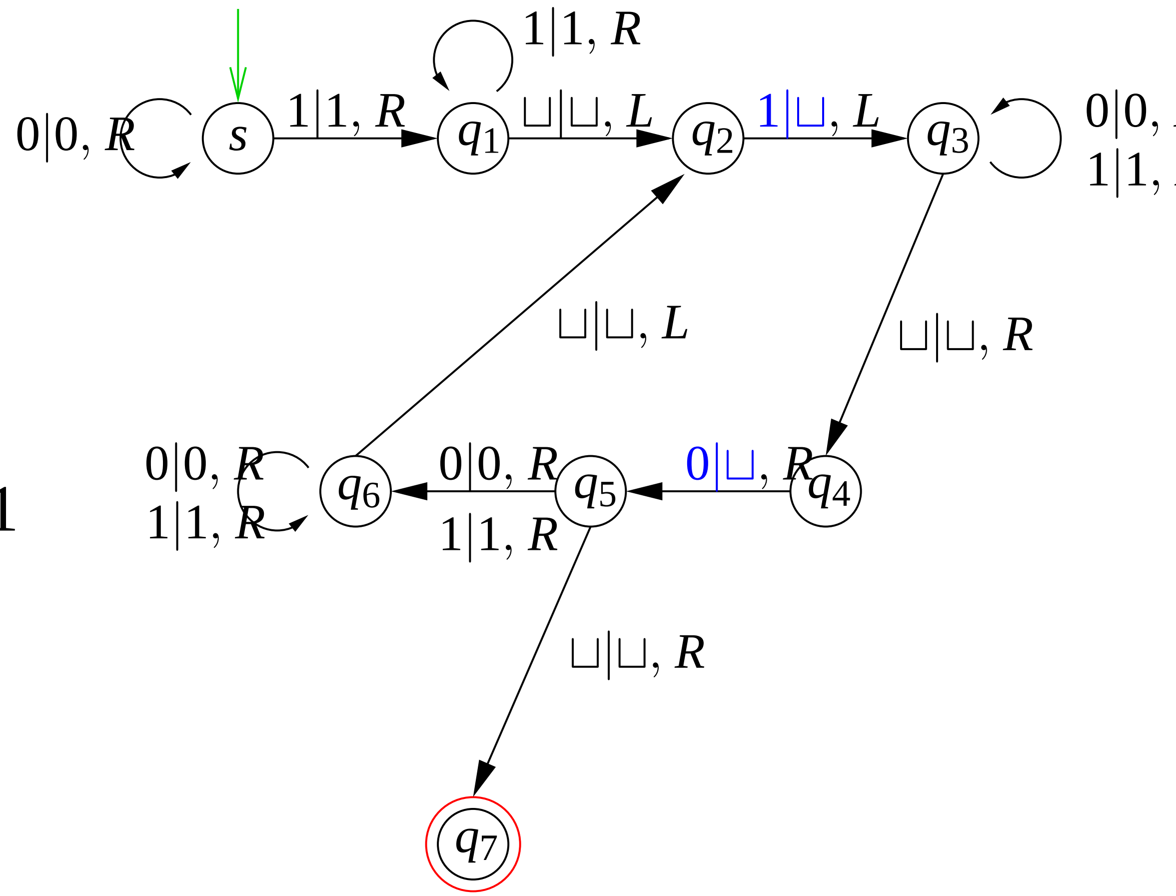
$(q_3)0\sqcup$

$(q_3)\sqcup 0$

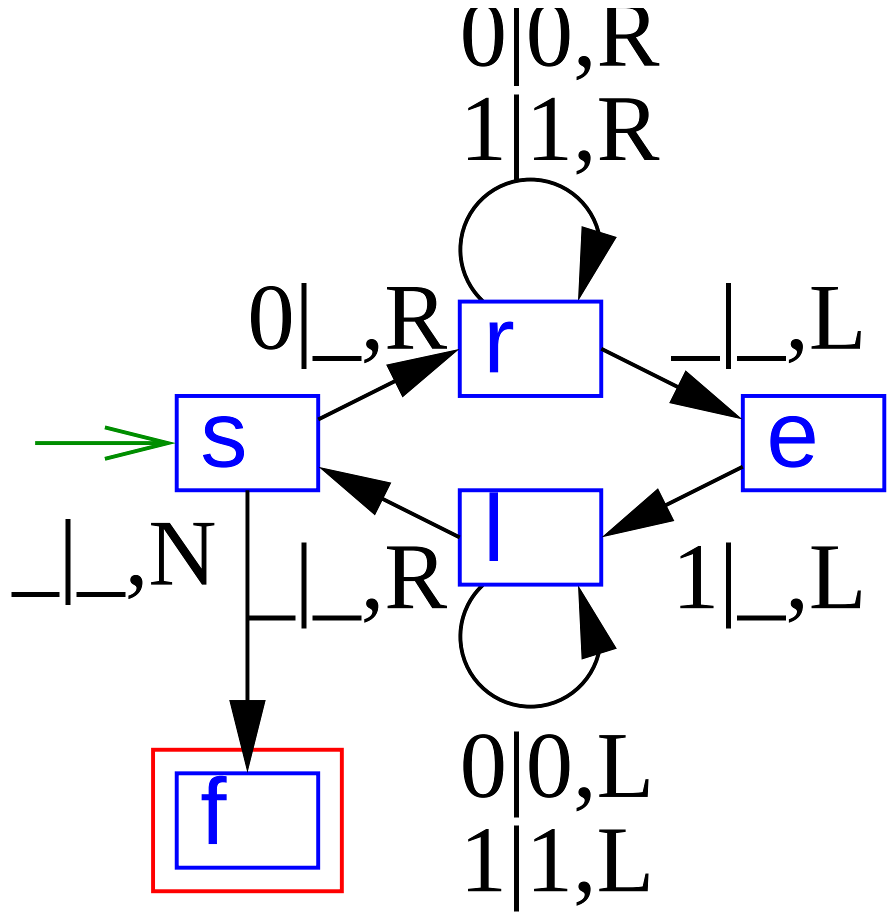
$(q_4)0$

$\sqcup(q_5)$

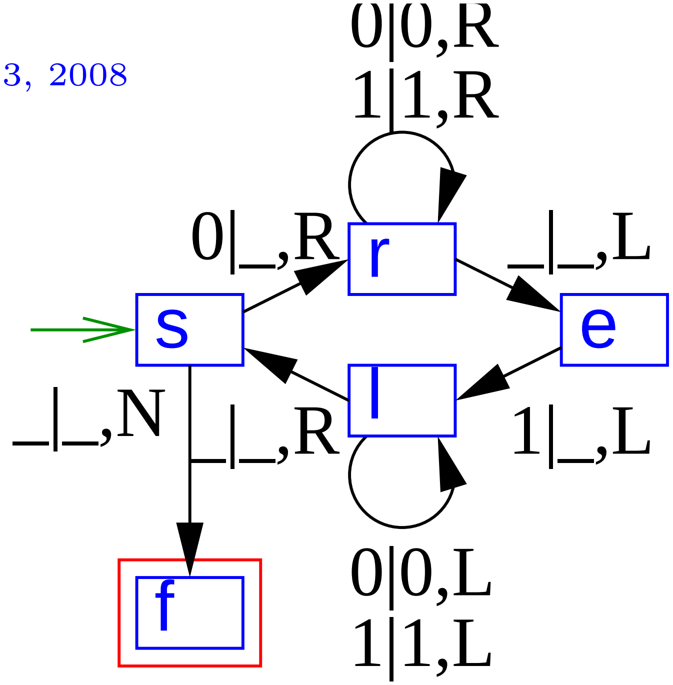
$(q_7)$



Пример: $\{0^n 1^n : n \geq 0\}$.



# Пример: $\{0^n 1^n : n \geq 0\}$.




Нека $k \geq 1$, $w \in \{0,1\}^*$

$\varepsilon$: $(s) \vdash (f)$.

$0$: $(s)0 \vdash (r) \vdash (e)$ завършва.

$1w$: $(s)1w$ завършва.

$0w0$: $(s)0w0 \vdash (r)w0 \overset{|w|+1}{\vdash} w0(r) \vdash w(e)0$ завършва.

$0w1$: $(s)0w1 \vdash (r)w1 \overset{|w|+1}{\vdash} w1(r) \vdash w(e)1 \overset{|w|+1}{\vdash} (\ell) \sqcup w \vdash (s)w$

$0^n1^n$: $(s)0^n1^n \vdash^* (s)0^{n-1}1^{n-1} \vdash^* \cdots \vdash^* (s) \vdash (f)$

$0u1$, $u \notin \{0^n1^n : n \geq 0\}$: $(s)0u1 \vdash^* (s)u$. Не завършва в $f$.

(Индукция)

# Варианти на машини на Тюринг

$k$ глави: $\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$

$k$ ленти: т.е. една глава за лента

$d$-размерна лента: например $d = 2$,

$$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, U, D, N\}$$

вероятностни: допълнително инструкции за движение на главата с рандом бит

# LBA:

Линейно ограничени недетрминистични машини на Тюринг

NTM $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ е линейно ограничена, когато

$$\forall a = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+ : (s)a \vdash^* \alpha(q)\beta \longrightarrow |\alpha\beta| \leq n$$

Твърдение: $\forall$тип 1 език $L : \exists$LBA $T : L(T) = L$

Д-во: Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$-тип 1 граматика с $L(G) = L$.

Да разгледаме NTM $T = (Q, \Sigma, (\Sigma \cup V), \delta, s, F)$:

Procedure inL($z$) // начална конфигурация $(s)z$

invariant "съдържанието на лентата"$\overset{*}{\Rightarrow} z$

invariant $|\text{tape}| \leq |z|$

while tape$\neq S$ do

if $\exists w \rightarrow \alpha \in P : \text{tape} = x\alpha y$ then // $2\times$ недетрм. избор!

tape:= $xwy$ // заместващо правило!

else reject $z$

accept $z$

приемащо изчисление$\xrightarrow{Inv.}$ $\exists$ извод.

$S \overset{*}{\Rightarrow} z \longrightarrow \exists$ съответстващо успешно изчисление .

# Подпрограма: търсене на подходяща лява страна

- Нека $G$ е в Курода-нормална форма $\longrightarrow$ $|$десните символи$| \leq 2$
- отиди до левия ограничител
- отиди до десния през лентата:
  - състоянието запазва символа $L$ в ляво от главата
  - $\delta$ може да зависи от $L$, актуалния символ на лентата и информацията от $P$ (крайно !) определяйки дали са подходящи за правилото
  - Да? $\longrightarrow$ Направи субституцията
  - Не? Продължи

# Подпрограма: заместване за $AB \longrightarrow CD$

- Една стъпка наляво
- Напиши $C$
- Една стъпка надясно
- Напиши $D$
- Обратно към главния цикъл

# Подпрограма: заместване за $AB \longrightarrow C$

Напиши $C$; една стъпка наляво

напиши $\sqcup$

иди в ляво в началото на лентата

запомни първия символ на лентата в състояние

repeat

  размени запазения и актуалния символ на лентата;

  една стъпка в дясно

until $\sqcup$ се замести

Твърдение: $\forall L : \exists \text{LBA } T : L(T) = L \rightarrow L$ е език от тип 1.

Д-во: Нека $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ е LBA и $L(T) = L$.

Да разгледаме граматика от тип 1

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

Идея: ТМ-конфигурация $\alpha(q)a\beta \rightsquigarrow$ твърдение за $\alpha(q,a)\beta$ плюс екстра информация за оригиналния вход.

3 фази на извода:

1. генерираме дума от $\Sigma^*$.
2. симулираме изчислението на ТМ.
3. след успешно приемане възстановяваме входната дума

# Фаза 1: генериране на дума от $\Sigma^*$

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ LBA и $L(T) = L$.

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

$\{S \rightarrow S(a, a) : a \in \Sigma\} \subseteq P$

$\{S \rightarrow (s, a, a) : a \in \Sigma\} \subseteq P$ край на фаза 1.

(и специални грижи ако $\varepsilon \in L$)

Пример: $S \Rightarrow S(c, c) \Rightarrow S(b, b)(c, c) \Rightarrow (s, a, a)(b, b)(c, c)$

отговаря на началната конфигурация $(s)abc$

# Фаза 2: симулиране на изчислението на TM

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ LBA с $L(T) = L$.

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

$$P := P \cup \{(q,a,c) \to (q',a',c) \quad : (q',a',N) \in \delta(q,a), c \in \Sigma\}$$

$$\cup \{(b,c')(q,a,c) \to (q',b,c')(a',c) \quad : (q',a',L) \in \delta(q,a), c \in \Sigma\}$$

$$\cup \{(q,a,c)b \to a'(q',b,c) \quad : (q',a',R) \in \delta(q,a), c \in \Sigma\}$$

Пример: $(s,a,a)(b,b)(c,c) \overset{*}{\Rightarrow} (x,a)(f,y,b)(z,c)$
отговаря на редицата от конфигурации
$(s)abc \vdash \cdots \vdash x(f)yz$

# Фаза 3: възстановява входната дума

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ LBA с $L(T) = L$.

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

$\{(f, a, c) \to c : f \in F, a \in \Gamma, c \in \Sigma\} \subseteq P$ Приемане

$\{(a, b) \to b : a \in \Gamma \wedge b \in \Sigma\} \subseteq P$

Пример: $(x, a)(f, y, b)(z, c) \Rightarrow (x, a)b(z, c) \Rightarrow ab(z, c) \Rightarrow abc$

# Свойства за затвореност за тип 1

Затвореност относно

- обединение $\bigcup$
- конкатенация $\cdot$
- звезда $*$
- сечение $\bigcap$
- допълнение $\bar{\cdot}$

# Затвореност относно обединение за тип $0/1$

$L(A_1) \cup L(A_2)$ hat тип $0/1$ ?

Две подпрограми $U_1$ за $L(A_1)$ и $U_2$ за $L(A_2)$.

Нова програма за $U_1 \vee U_2$.

Не е необходимо допълнително място.

Упражнение: Затвореност относно сечение за тип $0/1$

# Затвореност относно конкатенация за тип 0/1

$L(A_1) \cdot L(A_2)$ имат тип 0/1 ?
Две подпрограми $U_1$ за $L(A_1)$ и $U_2$ за $L(A_2)$.
Нова програма за $w \in L(A_1) \cdot L(A_2)$?:

Разделяме $w = w_1 w_2$ (недетрминистично).
return $w_1 \in L(A_1) \wedge w_2 \in L(A_2)$

Работи без разширяване на лентата но с маркиране.

Упражнение: Затвореност относно звезда на Клини $(*)$ за тип 0/1

# Затвореност относно допълнение за тип 1

Дадено: $L = L(G) \subseteq \Sigma^*$, $G = (V, \Sigma, P, S)$.

Идея: намираме LBA $M$, който приема $x \in \Sigma^n$, $x \notin L$.

$a := \left| \left\{ \alpha \in (V \cup \Sigma)^* : |\alpha| \leq n \wedge S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha \right\} \right|$ // todo

$c := 0$

foreach $\alpha \in (V \cup \Sigma)^* \setminus \{x\}$ c $|\alpha| \leq n$ do

  if $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$ then $c{+}{+}$

  else continue // недетрминистичен fail !

return $c = a$

Изчисляване на $\left|\left\{\alpha \in (V \cup \Sigma)^* : |\alpha| \leq n \wedge S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha\right\}\right|$

$a := 1$ // $|\{S\}|$

for $m := 1$ to $\infty$ do // край на извода

  $b := 0$ // брояч за нови или стари думи

  foreach $w' \in (V \cup \Sigma)^*$ в $|\alpha| \leq n$ do

    z:= 0 // брояч за стари думи

    foreach $w \in (V \cup \Sigma)^*$ с $|\alpha| \leq n$ do

      if $S \overset{\leq m}{\Rightarrow} w$ then $z++$ // недетрминистично

      if $w = w' \vee w \Rightarrow w'$ then $b$++

    if $z \neq a$ then fail

  if $a = b$ then break loop

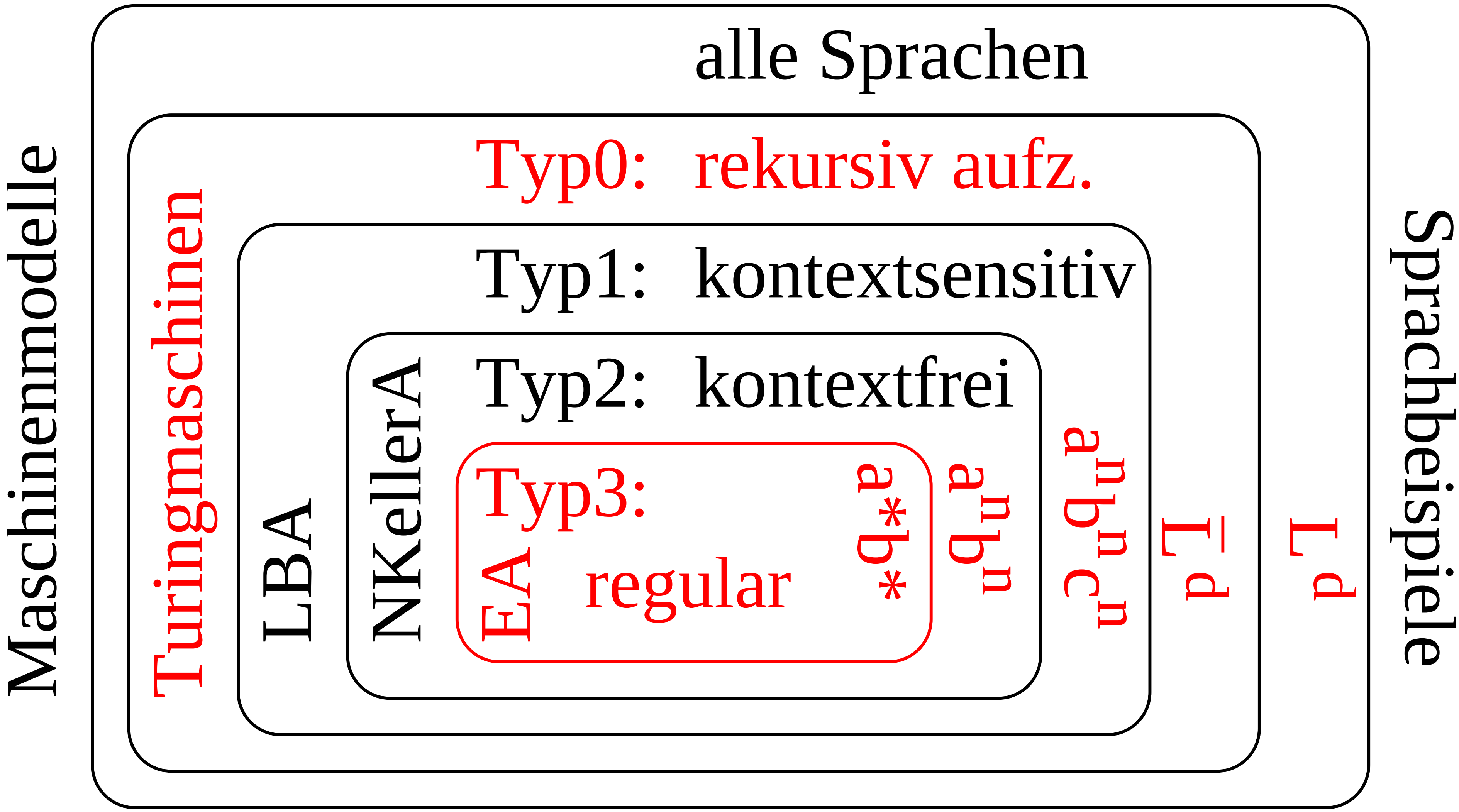
  $a := b$

# тип 0 езици

Твърдение: $L$ се разпознава от ТМ $\Leftrightarrow L$ има тип 0

Д-во: Аналогично на д-вото за тип 1.

# Йерархия на Чомски



| тип | описание |
| --- | --- |
| 3 | дясно линейни или ляво линейни<br>DFA, $\bar{\varepsilon}$NFA, $\varepsilon$NFA<br>регулярни изрази |
| Det. CF | LR($k$) граматика<br>DKellerA с кр. съст. |
| 2 | контекстно-свободна гр.<br>(1-съст.)NKellerA |
| 1 | контекстно-зависима<br>LBA |
| 0 | тип 0 grammar<br>Машина на Тюринг |

| тип | Недетрм. | Детерминистични | еквивалентни? |
|---|---|---|---|
| 3 | NFA | DFA | да |
| 2 | NKellerA | DKellerA | не |
| 1 | LBA | DLBA | ??? |
| 0 | NTM | DTM | да (спец. комп.) |

# Свойства на затвореност

| тип | $\cap$ | $\cup$ | $\bar{\cdot}$ | $\cdot$ | $*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | да | да | да | да | да |
| Дет. КСв | не | не | да | не | не |
| 2 | не | да | не | да | да |
| 1 | да | да | да | да | да |
| 0 | да | да | не | да | да |

# Рарешимост

| тип | Дума- | празнота- | еквивалентност | празно сечен |
|---|---|---|---|---|
| 3 | да | да | да | да |
| Дет. КСв | да | да | да [97] | не |
| 2 | да | да | не | не |
| 1 | да | не | не | не |
| 0 | не | не | не | не |

# Сложност на проблема за принадлежност на дума

| тип | сложност |
|---|---|
| 3 | $\mathcal{O}(n)$ |
| Дет. КСв | $\mathcal{O}(n)$ |
| 2 | $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ |
| 1 | $\lvert\Sigma\rvert^{\mathcal{O}(n)}$, "NP-трудна" $\rightsquigarrow$ теория на сложността |
| 0 | "рекурсивно номер." $\rightsquigarrow$ изчислими |

# Йерархия на Чомски-критицизъм

2: (Само?) тези граматики са “точно правилни”

3: “случйно” правят линейни изводи като един краен автомат

0,1: правилата за контекстно-зависими граматики са от твърде ниско ниво и са твърде подобни на TM за да се правят интересни моделни приложения

1: Едно от многото решения на специалния случай?
Защо точно линейно ограничение на паметта?
Има полезни обобщения на CFGs.