



1 Теория на автоматите и формалните езици

1.1 Въведение



Дуалност: Граматики \leftrightarrow Машини

Граматиките **генерират** думи.

Машините **приемат/разпознават** думи.



Пример: Аритметични изрази: EXPR

$$\Sigma = \{a, +, -, *, /, (,)\}$$

a е променлива за константи или променливи

$$(a - a) * a + a / (a + a) - 1 \in \text{EXPR}$$

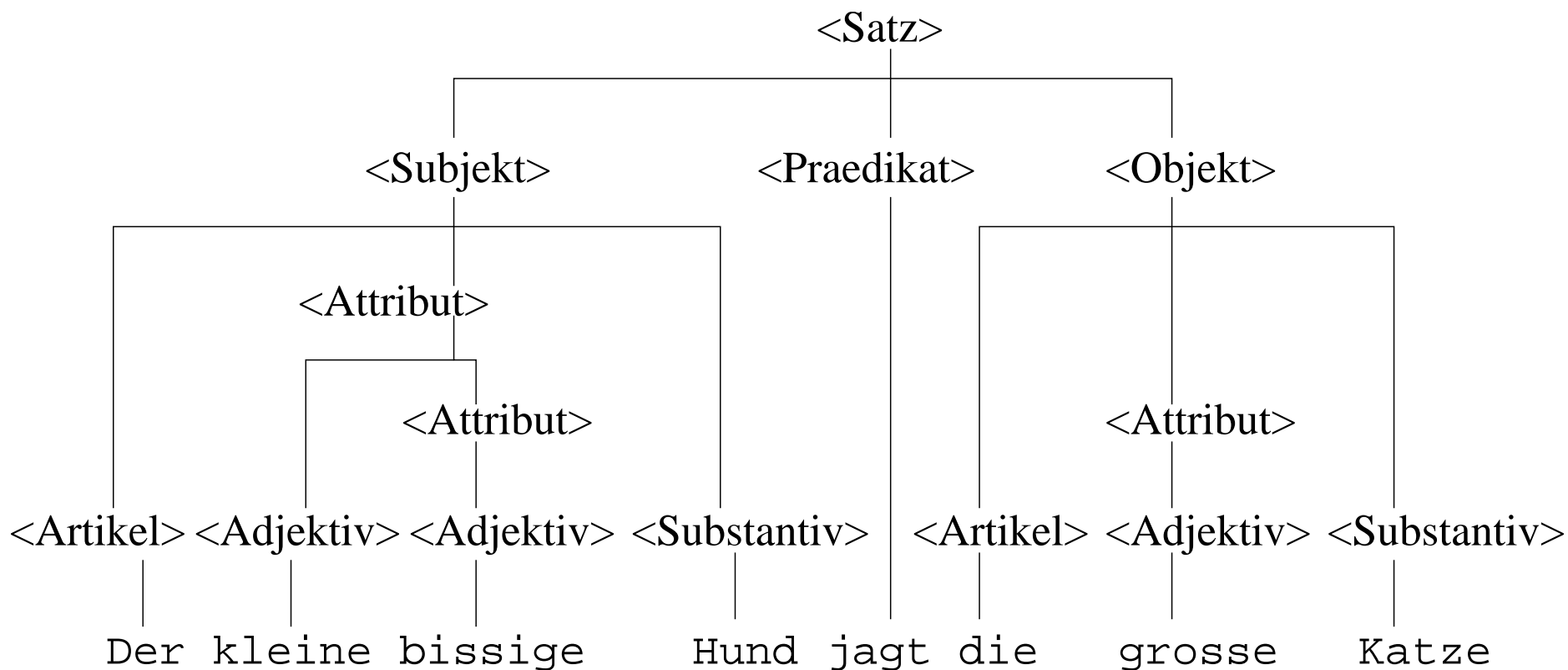
$$(((a))) \in \text{EXPR}$$

$$((a+) - a) \notin \text{EXPR}$$

Как да го формализираме?



Пример: Немската граматика



Поне част от структурата можем да представим с
контекстно свободна граматика



1.1.1 Граматики

Граматика $G = (V, \Sigma, P, S)$

□ V , Променливи

□ Σ , Азбука на терминалите ($V \cap \Sigma = \emptyset$)

□ $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$, Правила, $|P| < \infty$

Всяка лява част на правило съдържа поне една променлива

□ S , начална променлива



Пример: Аритметични изрази

$G = (\{E, T, F\}, \{a, +, *, (\,)\}, P, E)$, където

$$P = \{E \rightarrow T, \\ E \rightarrow E + T, \\ T \rightarrow F, \\ T \rightarrow T * F, \\ F \rightarrow a, \\ F \rightarrow (E)\}$$



Релация за преход \Rightarrow

Дадена е граматиката $G = (V, \Sigma, P, S)$.

$u \Rightarrow_G v$ е изпълнено, ако

$$u = xyz \in (V \cup \Sigma)^*,$$

$$v = xy'z \in (V \cup \Sigma)^*,$$

$$y \rightarrow y' \in P.$$

" u отива **директно** в v ."

Индекса G ще пропускаме, когато е ясно за коя граматика става дума.



Релации за преход \Rightarrow^* , \Rightarrow^n

Дължина на извод :

$$\forall u \in (V \cup \Sigma)^* : u \xrightarrow{0} u$$

$$\forall u, v, w \in (V \cup \Sigma)^* : u \Rightarrow v \wedge v \xrightarrow{n} w \longrightarrow u \xrightarrow{n+1} w$$

Извод:

$$\exists n \geq 0 : u \xrightarrow{n} v \longrightarrow u \xrightarrow{*} v$$

Наблюдение: $\xrightarrow{*}$ е рефлексивното и транзитивно затваряне на \Rightarrow .

$u \xrightarrow{*}_G v$ означава "v е **изводима** от u"



Езикът генериран от $G = (V, \Sigma, P, S)$

$$L(G) := \left\{ w \in \Sigma^* : S \xRightarrow{*} w \right\}$$



Извод

Редицата от **думи**,

$$\left(\underbrace{w_1}_{=S}, \underbrace{w_2}_{\in(\Sigma UV)^*}, \dots, \underbrace{w_{n-1}}_{\in(\Sigma UV)^*}, \underbrace{w_n}_{\in\Sigma^*} \right)$$

се нарича извод на w_n , ако

$$w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n.$$



$E \Rightarrow$	$E \rightarrow E + T$
$\Rightarrow E + T$	$E \rightarrow T$
$\Rightarrow T + T$	$T \rightarrow T * F$
$\Rightarrow T * F + T$	$T \rightarrow T * F$
$\Rightarrow T * F * F + T$	$T \rightarrow F$
$\Rightarrow F * F * F + T$	$F \rightarrow a$
$\Rightarrow a * F * F + T$	$F \rightarrow a$
$\Rightarrow a * a * F + T$	$F \rightarrow (E)$
$\Rightarrow a * a * (E) + T$	$E \rightarrow E + T$
$\Rightarrow a * a * (E + T) + T$	$E \rightarrow T$
$\Rightarrow a * a * (T + T) + T$	$T \rightarrow F$
$\Rightarrow a * a * (F + T) + T$	$F \rightarrow a$
$\Rightarrow a * a * (a + T) + T$	$T \rightarrow F$
$\Rightarrow a * a * (a + F) + T$	$F \rightarrow a$
$\Rightarrow a * a * (a + a) + T$	$T \rightarrow F$
$\Rightarrow a * a * (a + a) + F$	$F \rightarrow a$
$\Rightarrow a * a * (a + a) + a$	

Пример:



1.1.2 Йерархия на Чомски

- Елегантна **спецификация** за езици
- Класификация** на езици



Класификация на граматики

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

[Ноам Чомски, 1956]

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$.

$$\forall \ell \rightarrow r \in P :$$

Тип 0: всякакви правила

Тип 1, контекстно зависими: $|\ell| \leq |r|$

Специални правила: $S \rightarrow \varepsilon$ се допуска, ако $S \notin r$,

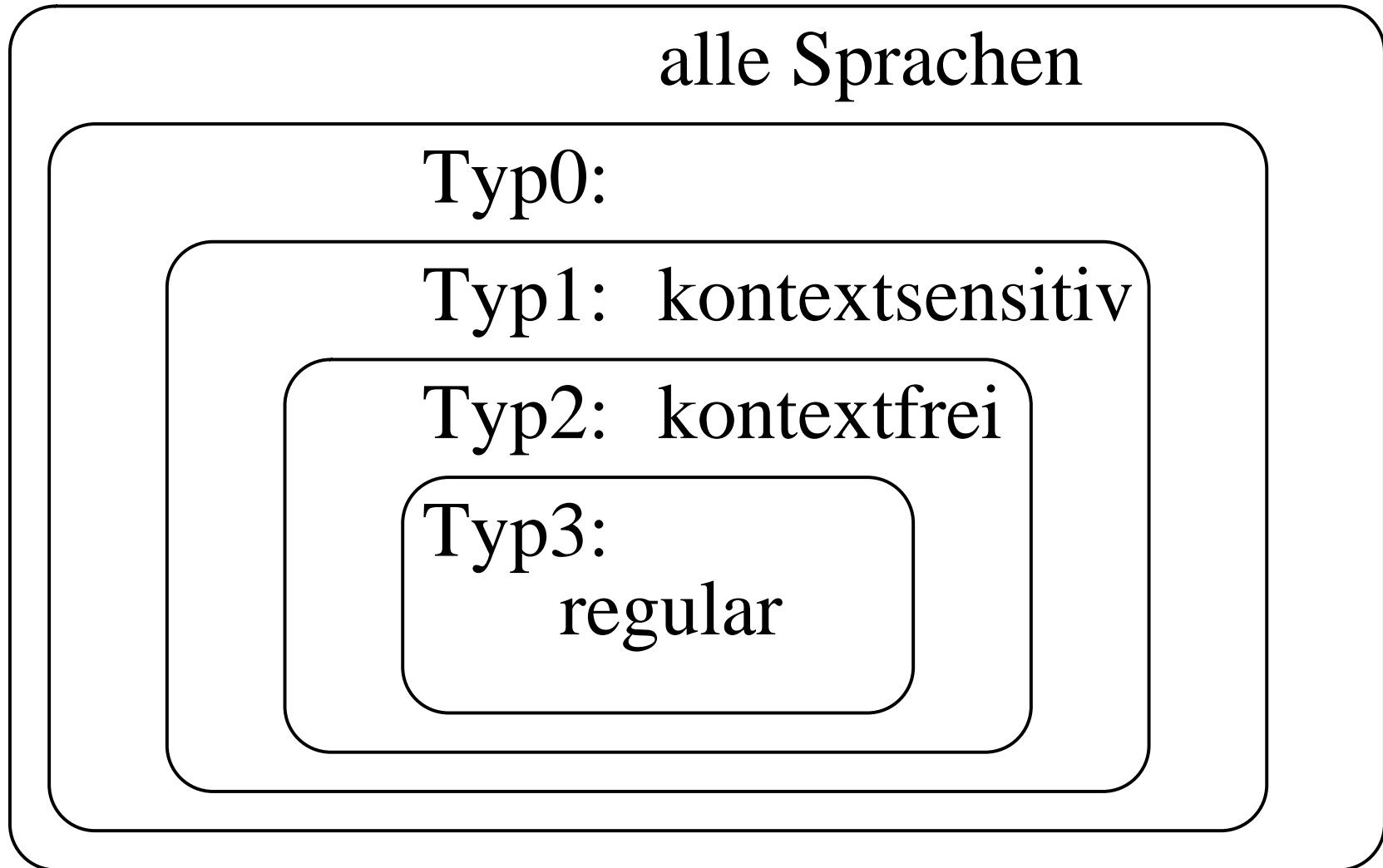
Внимание: в литературата не е унифицирано!

Тип 2, контекстно свободна: Тип 1 и $\ell \in V$ $A \rightarrow \varepsilon$ се
допуска

Тип 3, регулярни: Тип 2 и $r \in \Sigma \cup \Sigma V$



Йерархия на Чомски





Пример: Тип 3

$G = (\{A, B\}, \{a, b\}, P, A)$, където

$$P = \{A \rightarrow aA,$$

$$A \rightarrow aB,$$

$$B \rightarrow bB,$$

$$B \rightarrow b\}$$

Твърдение: $L(G) = \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$



Доказателство - основен метод:

$$1. L(G) \supseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$$

$$2. L(G) \subseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$$

Винаги с **пълна индукция**

$$G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow aA, A \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}, A)$$



Доказательство: $L(G) \supseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$ в деталях

Лема 1: $\forall n \geq 1 : A \xRightarrow{*} a^n B$

$n = 1 : A \rightarrow aB \in P$

$n \rightsquigarrow n + 1 : A \rightarrow aA \xRightarrow{*} a a^n B = a^{n+1} B$

$$G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow aA, A \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}, A)$$



Доказательство: $L(G) \supseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$ в детаيلي

Лема 1: $\forall n \geq 1 : A \xRightarrow{*} a^n B$

Лема 2: $\forall m \geq 1 : B \xRightarrow{*} b^m$

$m = 1 : B \rightarrow b \in P$

$m \rightsquigarrow m + 1 : B \rightarrow bB \xRightarrow{*} \underbrace{bb^m}_{= b^{m+1}}$

$$G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow aA, A \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}, A)$$



Доказательство: $L(G) \supseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$ в детаيلي

Лема 1: $\forall n \geq 1 : A \xRightarrow{*} a^n B$

Лема 2: $\forall m \geq 1 : B \xRightarrow{*} b^m$

Доказательство \supseteq : $\forall n \geq 1, m \geq 1 : A \xRightarrow{*} a^n B \xRightarrow{*} a^n b^m$

Лема 1

Лема 2

така $a^n b^m \in L(G)$

(Деф. $L(G)$)

$$G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow aA, A \rightarrow aB, A \rightarrow a, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}, A)$$



Доказательство: $L(G) \supseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$

$$A \underbrace{\overset{n-1}{\Rightarrow}}_{A \rightarrow aA} a^{n-1} A \Rightarrow a^n B \underbrace{\overset{m-1}{\Rightarrow}}_{B \rightarrow bB} a^n b^{m-1} B \Rightarrow a^n b^m$$

$$G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow aA, A \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}, A)$$



Доказателство: $L(G) \subseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$

Индукция по дължината на извода ℓ : (По-силно)

Индукционно предположение : $\forall \alpha \in (V \cup \Sigma)^* : A \xRightarrow{\leq \ell} \alpha \longrightarrow \alpha \in \{a\}^* \cdot A \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^* \cdot B \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^+$

$\ell = 0$: $A \in \{a\}^* \cdot A$

$\ell \rightsquigarrow \ell + 1$: Да разгледаме извода $A \xRightarrow{*} \alpha' \xRightarrow{C \rightarrow \beta} \alpha$

α'	$C \rightarrow \beta$	α	$\longrightarrow \alpha \in$
$a^n A$	$A \rightarrow aA$	$a^{n+1} A$	$\{a\}^+ \cdot A$
$a^n A$	$A \rightarrow aB$	$a^{n+1} B$	$\{a\}^+ \cdot \{b\}^* \cdot B$
$a^n b^m B$	$B \rightarrow bB$	$a^n b^{m+1} B$	$\{a\}^+ \cdot \{b\}^* \cdot B$
$a^n b^m B$	$B \rightarrow b$	$a^n b^{m+1}$	$\{a\}^+ \cdot \{b\}^+$





Д-во : $L(G) \subseteq \{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$

Ако $A \xRightarrow{*} \alpha$, то $\alpha \in \{a\}^* \cdot A \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^* \cdot B \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^+$.

Изводите запазват тази

инварианта. ■

$$G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow aA, A \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow b\}, A)$$



Твърдение:

Езиците, разпознавани от DFA са от Чомски тип 3

Нека $A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$ е DFA.

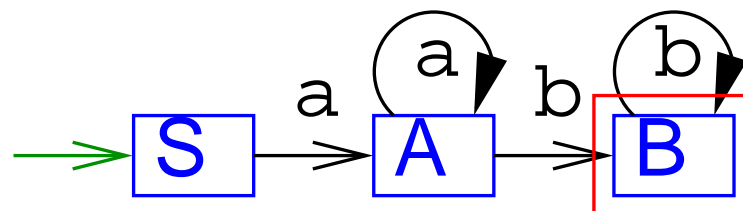
Да разгледаме граматиката $G = (Z, \Sigma, P, S)$, където

$$P = \{Q \rightarrow aQ' : \delta(Q, a) = Q'\} \cup \\ \{Q \rightarrow a : \delta(Q, a) = Q' \in F\} \cup \\ \{S \rightarrow \varepsilon : S \in F\} .$$

тогава $L(G) = L(A)$



Пример: $\{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$



$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

q	c	$\delta(q, c)$	$\in P$
S	a	A	$S \rightarrow aA$
A	a	A	$A \rightarrow aA$
A	b	B	$A \rightarrow bB, A \rightarrow b$
B	b	B	$B \rightarrow bB, B \rightarrow b$

$A \delta(S, b)$?



Езиците, разпознавани от DFA са от Чомски тип 3

Нека $A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$ е DFA.

Да разгледаме граматиката $G = (Z, \Sigma, P, S)$, където

$$P = \{Q \rightarrow aQ' : \delta(Q, a) = Q'\} \cup \\ \{Q \rightarrow a : \delta(Q, a) = Q' \in F\} \cup \\ \{S \rightarrow \varepsilon : S \in F\} .$$

тогава $L(G) = L(A)$.

Идея: \exists една 1-1 релация между

изводите $S \Rightarrow w_1 A_1 \Rightarrow w_1 w_2 A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_1 w_2 \dots w_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow w$ и
DFA изчисляващите пътища $S \xRightarrow{w_1} A_1 \xRightarrow{w_2} A_2 \xRightarrow{w_3} \dots \xRightarrow{w_n} f \in F$.



Д-во: $L(G) = L(A)$:

Ако $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(G) \Leftrightarrow S \rightarrow \varepsilon \in P \Leftrightarrow S \in F \Leftrightarrow \varepsilon \in L(A)$

$A = (Z, \Sigma, \delta, S, F)$, $G = (Z, \Sigma, P, S)$ и $P = \{Q \rightarrow aQ' : \delta(Q, a) = Q'\} \cup \{Q \rightarrow a : \delta(Q, a) = Q' \in F\} \cup \{S \rightarrow \varepsilon : S \in F\}$



Д-во (скица) $L(G) = L(A)$ Ако $|w| = n, n > 0$:

$$w_1 \cdots w_n \in L(G)$$

$$\Leftrightarrow S \Rightarrow w_1 A_1 \Rightarrow w_1 w_2 A_2 \xRightarrow{*} w_1 \cdots w_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow w_1 \cdots w_n$$

$$\Leftrightarrow \{S \rightarrow w_1 A_1, A_1 \rightarrow w_2 A_2, \dots, A_{n-2} \rightarrow w_{n-1} A_{n-1}, A_{n-1} \rightarrow w_n\} \subseteq P$$

$$\Leftrightarrow \delta(S, w_1) = A_1, \delta(A_1, w_2) = A_2, \dots, \delta(A_{n-1}, w_n) = A_n \in F$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{изчислителен път } S \xRightarrow{w_1} A_1 \xRightarrow{w_2} A_2 \xRightarrow{w_3} \cdots A_{n-1} \xRightarrow{w_n} A_n \in F$$

$$\Leftrightarrow w_1 \cdots w_n \in L(A)$$

(В 2 посоки ‘ \Leftrightarrow ’)



винаги се доказва

$$A = (Z, \Sigma, \delta, S, F), G = (Z, \Sigma, P, S) \text{ и } P = \{Q \rightarrow aQ' : \delta(Q, a) = Q'\} \cup \{Q \rightarrow a : \delta(Q, a) = Q' \in F\} \cup \{S \rightarrow \varepsilon : S \in F\}$$



Тип-3 \rightarrow NFA

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$ е граматика от тип 3.

Да разгледаме NFA

$A = (V \cup \{f\}, \Sigma, \delta, S, \{f\} \cup \{S : S \rightarrow \varepsilon \in P\})$, където

$$\delta = \{(q, a, q') : q \rightarrow aq' \in P\} \cup \\ \{(q, a, f) : q \rightarrow a \in P\}$$

(Релационно означение за δ).

Има 1-1 релация между изводите от вида

$S \Rightarrow w_1 A_1 \Rightarrow w_1 w_2 A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_1 w_2 \dots w_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow w$ в G и

приемащите пътища от вида

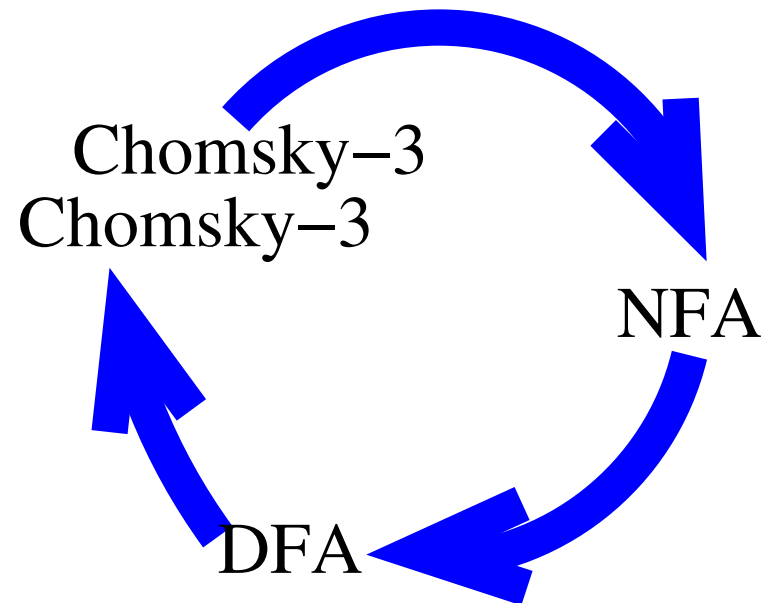
$S \xrightarrow{w_1} A_1 \xrightarrow{w_2} A_2 \xrightarrow{w_3} \dots \xrightarrow{w_n} f$ с A .

Следователно $L(A) = L(G)$.



Еднозначни граматика от тип-3

Твърдение: $\forall L \in \text{type-3} : \exists \text{type-3}$ граматика с
еднозначни изводи.



Д-во : Нека A е DFA и $L(A) = L$.

Съответната граматика от тип-3 за A има еднозначни
изводи.



Пример: Тип 2 (Аритметични изрази)

$$G = (\{E, T, F\}, \{a, +, *, (,)\}, P, E) \text{ с}$$

$$P = \{E \rightarrow T,$$

$$E \rightarrow E + T,$$

$$T \rightarrow F,$$

$$T \rightarrow T * F,$$

$$F \rightarrow a,$$

$$F \rightarrow (E)\}$$



Пример: Тип 2

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow ab, S \rightarrow aSb\}, S).$$

$$L(G) = \{a^n b^n : n \geq 1\}.$$

$$\text{Д-во } L(G) \supseteq \{a^n b^n : n \geq 1\}:$$

$$S \xRightarrow{n-1} a^{n-1} S b^{n-1} \Rightarrow a^n b^n. \quad \blacksquare$$

$$\text{Д-во } L(G) \subseteq \{a^n b^n : n \geq 1\}:$$

$$S \xRightarrow{*} \alpha \longrightarrow \alpha \in \{a^k S b^k : k \geq 0\} \cup \{a^n b^n : n \geq 1\}$$

(Инварианта) \blacksquare



Пример: Тип 1

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

$$P = \{S \rightarrow aSBC,$$

$$S \rightarrow aBC,$$

$$CB \rightarrow BC,$$

$$aB \rightarrow ab,$$

$$bB \rightarrow bb,$$

$$bC \rightarrow bc,$$

$$cC \rightarrow cc\}$$

Твърдение: $L(G) = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$



Пример

$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}BC \Rightarrow aa\underline{S}BCBC \Rightarrow aaa\underline{BCBCBC}$
 $\Rightarrow aaa\underline{BBCBC} \Rightarrow aaa\underline{BBCBCC} \Rightarrow aaa\underline{BBBCCC}$
 $\Rightarrow aaa\underline{bBBCCC} \Rightarrow aaab\underline{bBCCC} \Rightarrow aaabbb\underline{CCC}$
 $\Rightarrow aaabbb\underline{cCC} \Rightarrow aaabbb\underline{ccC} \Rightarrow aaabbbccc$

$S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc$



Д-во за $a^n b^n c^n \subseteq L(G)$

$$S \xRightarrow{n-1} a^{n-1} S(BC)^{n-1}$$

$$(S \rightarrow aSBC)$$

$$\Rightarrow a^n (BC)^n$$

$$(S \rightarrow aBC)$$

$$\xRightarrow{*} a^n B^n C^n$$

$$(CB \rightarrow BC)$$

Лема S

$$\Rightarrow a^n b B^{n-1} C^n$$

$$(aB \rightarrow ab)$$

$$\xRightarrow{n-1} a^n b^n C^n$$

$$(bB \rightarrow bb)$$

$$\Rightarrow a^n b^n c C^{n-1}$$

$$(bC \rightarrow bc)$$

$$\xRightarrow{n-1} a^n b^n c^n$$

$$(cC \rightarrow cc)$$

Упражнение: Проверете всичките части



Лексикографска наредба

Нека $\alpha, \beta \in \Sigma^*$

$\forall \alpha \in \Sigma^* : \varepsilon \leq \alpha$

$a\alpha \leq b\beta$ т.т.к. $a < b$ или $a = b$ и $\alpha \leq \beta$ ($a, b \in \Sigma; \alpha, \beta \in \Sigma^*$)

Наблюдение: \leq дефинира **пълна (линейна) наредба**

Д-во: упражнение?

Пример: $\varepsilon < a < aa < ab < b < ba < bb$

- Аналогично за наредени n -ки
- Можем да правим **доказателства по индукция** в едно линейно (тотално) наредено **крайно** множество от **крайни редици** от думи.



Лема S: $(BC)^n \xrightarrow{*} B^n C^n$ с помощта на $CB \rightarrow BC$

Доказателство с индукция по лексикографската наредба на $\left\{ w \in \{B, C\}^{2n} : w \text{ съдържа един и същи брой } B \text{ и } C \right\}$

α минимален $\longrightarrow \alpha = B^n C^n$

α не е минимален \longrightarrow

$$\alpha = \gamma CB\beta$$

$$\Rightarrow \gamma BC\beta$$

е по-малко!

$$\xrightarrow{*} B^n C^n$$

ИП



Упражнение: Покажете, че няма минимална дума α от вида $\gamma CB\beta$. Следващо упражнение: Колко дълъг е извода като функция на n ?



Доказателство: $L(G) \subseteq a^n b^n c^n$

Инварианта: $\#a = \#(b, B) = \#(c, C)$

В частност: $\forall w \in L(G) : \#a = \#b = \#c$.

Остава да видим, че $L(G) \subseteq a^* b^* c^*$.

Всички a -та се появяват преди всяко b и c .

$(S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC)$

Първото b следва след полследното a . $(aB \rightarrow ab)$

Следващото появяващо се b е след всичките b -та.

$(bB \rightarrow bb)$

Първото c следва след последното b . $(bC \rightarrow bc)$

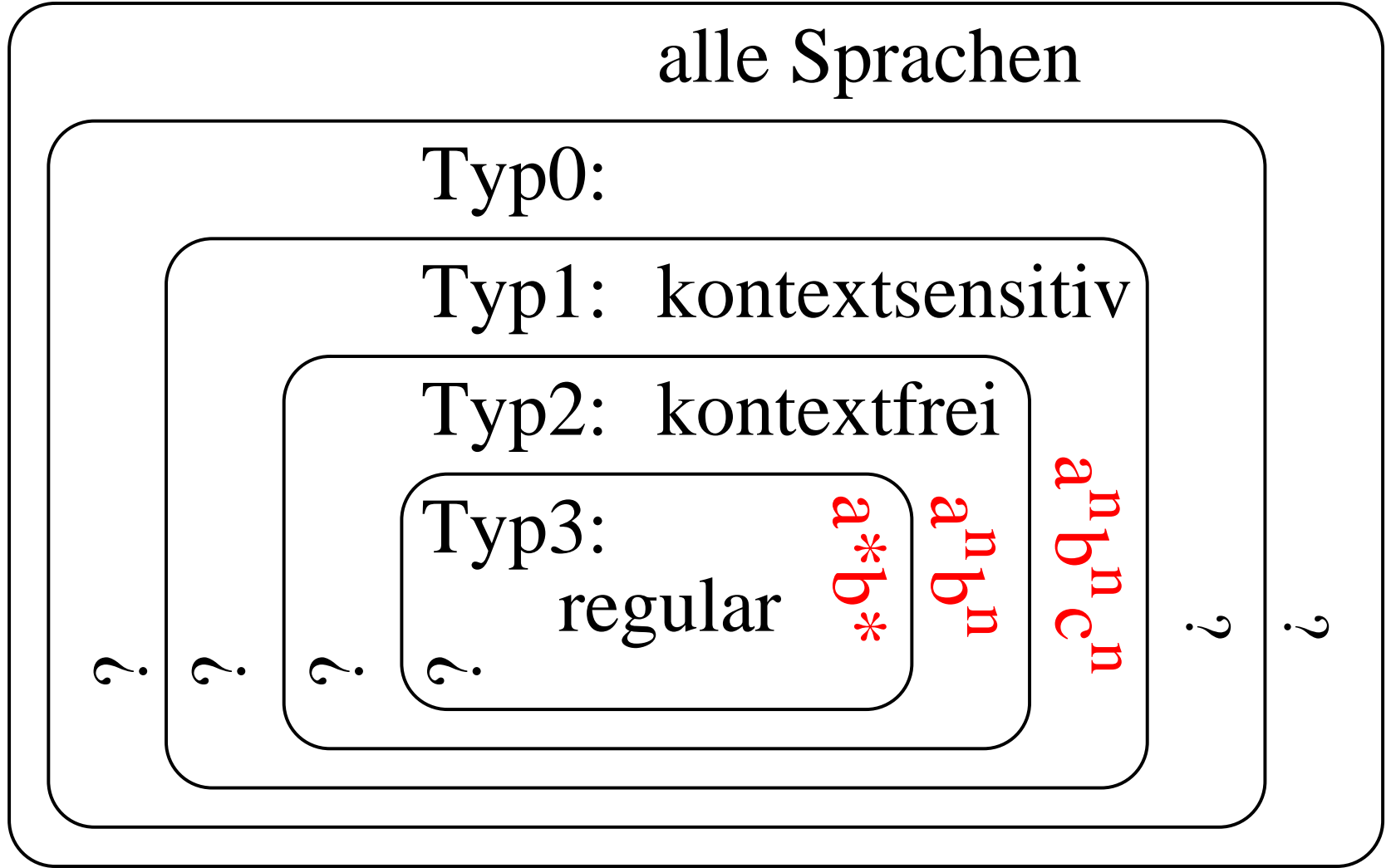
Следващото c следва съществуващите c -та. $(cC \rightarrow cc)$

$S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc$



Йерархия на Чомски

Maschinenmodelle



Sprachbeispiele



План

- Ще разгледаме за всеки тип граматика \leftrightarrow **един машинен модел**
- Ще покажем примери за езици, които **не** са от по-простите типове граматика
- Един пример за граматика от тип 0
- Алгоритми и стандартни техники за доказателства на стандартните алгоритмични проблеми.



1.1.3 Проблемът за принадлежност на дума

Основният проблем за формалните езици:

Дадено: $G = (V, \Sigma, P, S)$, $w \in \Sigma^*$

Въпрос: $w \in L(G)$?

($\Leftrightarrow S \xRightarrow{*} w$?)



Проблемът за принадлежност на дума към език от тип 1

Дадено: $G = (V, \Sigma, P, S)$, $w \in \Sigma^*$

Въпрос: $w \in L(G)$?

Да разгледаме един **краен граф** $H = (U, E)$, където

$U = \{x \in (\Sigma \cup V)^* : |x| \leq |w|\}$ и

$E = \{(x, y) : x \Rightarrow_G y\}$.

$w \in L(G)$ т.т.к. w е в H и е **достижима** от S .

Следствие:

Проблемът за принадлежност на дума на езици от тип 1 е разрешим алгоритмично за крайно време.

Въпрос: Защо този подход не работи за езици от **тип 0**?



Пример

$abc \in L(G)$

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S) ?$

$P = \{S \rightarrow aSBC,$

$S \rightarrow aBC,$

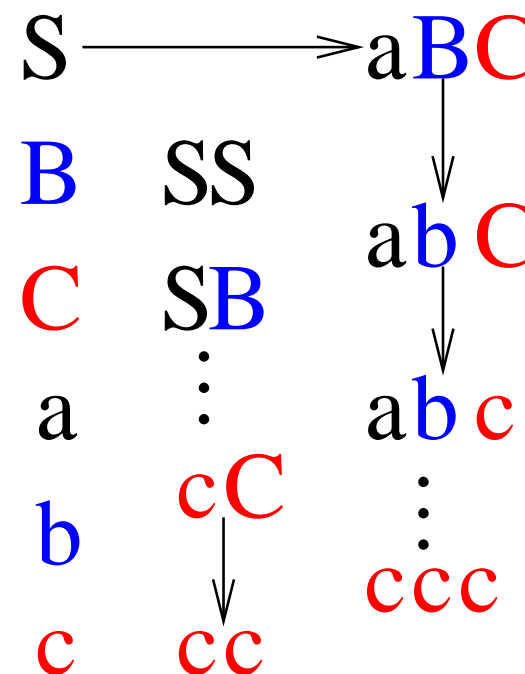
$CB \rightarrow BC,$

$aB \rightarrow ab,$

$bB \rightarrow bb,$

$bC \rightarrow bc,$

$cC \rightarrow cc\}$





Оценяване на времето за изпълнение

Дадено: $G = (V, \Sigma, P, S)$, $w \in \Sigma^*$

Въпрос: $w \in L(G)$?

Да разгледаме **крайния граф** $H = (U, E)$, където

$U = \{x \in (\Sigma \cup V)^* : |x| \leq |w|\}$ и

$E = \{(x, y) : x \Rightarrow_G y\}$.

Достижимостта е за време $\mathcal{O}(|U| + |V|)$.

Доминиращо е времето за **построяването** на графа.

$(|V| + |\Sigma|)^{|w|}$ възли (!)

× $|w|$ възможни замествания

× $|P|$ възможни изводи

× $\mathcal{O}(|w|)$ време за проверка и заместване



Синтактично (parse) дърво на извод (за тип 2)

Едно наредено дърво на извод, което описва (за тип 2)

$S \xRightarrow{*} w$ независимо от ред на заместванията.

Конструкция на извода

$S = x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_n = x \in \Sigma^*$:

Корен S .

Ако на стъпка i правим заместването $A \rightarrow z = z_1, \dots, z_k$.

\rightarrow възлите наследници на A са z_1, \dots, z_k .

Наблюдение: Листата са буквите на x .



Синтактично дърво на извод

Дърво с резултат a

Дърво с резултат ϵ

Дърво с резултат $u_1 u_2 \dots u_n$

$$A \rightarrow A_1 A_2 \dots A_n$$

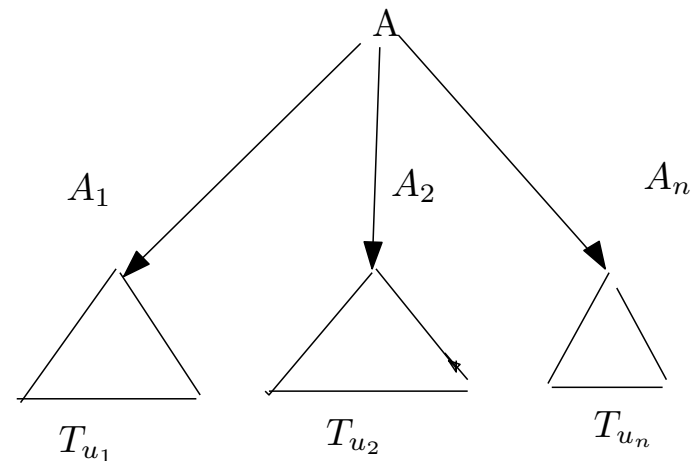


a

s



ϵ

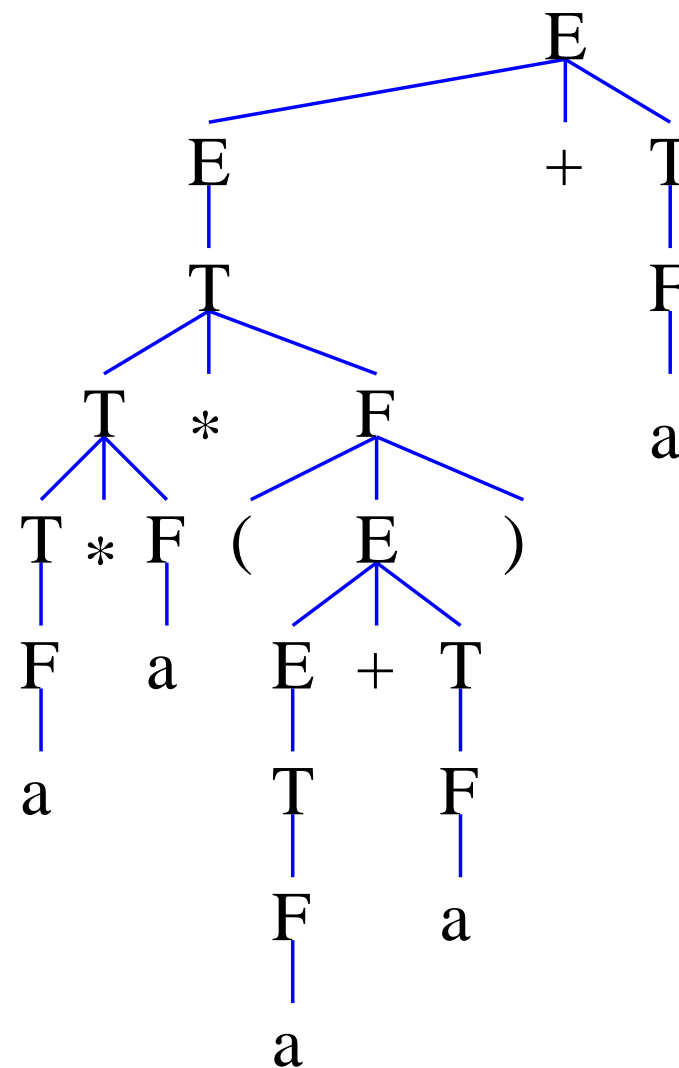




$E \Rightarrow$
 $\Rightarrow E + T$
 $\Rightarrow T + T$
 $\Rightarrow T * F + T$
 $\Rightarrow T * F * F + T$
 $\Rightarrow F * F * F + T$
 $\Rightarrow a * F * F + T$
 $\Rightarrow a * a * F + T$
 $\Rightarrow a * a * (E) + T$
 $\Rightarrow a * a * (E + T) + T$
 $\Rightarrow a * a * (T + T) + T$
 $\Rightarrow a * a * (F + T) + T$
 $\Rightarrow a * a * (a + T) + T$
 $\Rightarrow a * a * (a + F) + T$
 $\Rightarrow a * a * (a + a) + T$
 $\Rightarrow a * a * (a + a) + F$
 $\Rightarrow a * a * (a + a) + a$

$E \rightarrow E + T$
 $E \rightarrow T$
 $T \rightarrow T * F$
 $T \rightarrow T * F$
 $T \rightarrow F$
 $F \rightarrow a$
 $F \rightarrow a$
 $F \rightarrow (E)$
 $E \rightarrow E + T$
 $E \rightarrow T$
 $T \rightarrow F$
 $F \rightarrow a$
 $T \rightarrow F$
 $F \rightarrow a$

Пример





Най-ляв извод

На всяка стъпка в извода:

заместваме **най-лявата** променлива

Пример: от предната стр.

1-1 релация най-ляв извод \leftrightarrow синтактично дърво



Наблюдение (Твърдение) (за тип 2)

$x \in L(G) \Leftrightarrow \exists$ извод за x

$\Leftrightarrow \exists$ синтактично дърво за извода на x по листата

$\Leftrightarrow \exists$ най-ляв извод за x

Задача: Дефинирайте **най-десен извод** със съответните свойства.



Пример за нееднозначни изводи

$G = (\{E\}, \{a, +, *, (\,)\}, P, E)$, където

$$P = \{E \rightarrow E + E, \\ E \rightarrow E * E, \\ E \rightarrow a, \\ E \rightarrow (E)\}$$

